

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

EXEMPLES TYPES CORRIGES

Extrait concours ENSAM — Exercice d'entraînement

1)- Les propositions suivantes sont-elle équivalentes ?

P : « $\forall x \in \mathbb{R}, \left(f(x)=0 \text{ et } g(x)=0\right)$ » et Q : « $\left(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=0\right)$ et $\left(\forall x \in \mathbb{R}, g(x)=0\right)$ »

2)- Les propositions suivantes sont-elle équivalentes ?

R : « $\forall x \in \mathbb{R}, \left(f(x)=0 \text{ ou } g(x)=0\right)$ » et S : « $\left(\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=0\right)$ ou $\left(\forall x \in \mathbb{R}, g(x)=0\right)$ »

3)- Donner un exemple de fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux non nulles et dont le produit est nul.



Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

Soit f une fonction définie sur $[0,2]$. On considère les propositions suivantes :

P : « Pour tout $x \in [0,2], f(x) \neq 0$ » et Q : « f n'est pas positive sur $[0,2]$ »

Alors :

(A) P signifie : « f est strictement positive sur $[0,2]$ ou f est strictement négative sur $[0,2]$ »

(B) P signifie : « Pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ »

(C) Q signifie : « f est négative sur $[0,2]$ »

(D) La négation de P peut s'écrire : « f est la fonction nulle sur $[0,2]$ »

(E) La négation de Q peut s'écrire : « f n'est pas négative sur $[0,2]$ »



Du Bac Aux Classes Prépas — Vrai ou Faux ?

Soit X, Y et Z trois ensembles non vides de réels. Sachant que :

- Aucun élément de X n'est négatif ;
- Aucun élément de Y n'admet de racine carrée réelle ;
- Tout élément de Z est supérieur ou égal à 1 ;

On peut en déduire :

(A) Aucun élément de X n'appartient à Y

(B) Aucun élément de Z n'appartient à Y

(C) Tout réel qui n'appartient pas à Y appartient à X

(D) Pour qu'un réel appartienne à X et à Z, il faut qu'il soit positif

(E) Pour qu'un réel appartienne à X et à Z, il suffit qu'il soit supérieur ou égal à 1.



Extrait concours ENSA Choisir la bonne réponse

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ et la proposition : (P) : « f est bornée »

Parmi les propositions suivantes, reconnaître la négation de (P) :

(A) : « f n'est pas majorée »

(B) : « f n'est ni majorée, ni minorée »

(C) : « f est soit non majorée, soit non minorée »



Du Bac Aux Classes Prépas Choisir la bonne réponse

Il n'est évidemment pas vrai que « tous les chats sont gris ou marron ». Quelle est alors la négation de l'assertion « tous les chats sont gris ou marron » ?

(A) Il existe un chat blanc

(B) Aucun chat n'est gris ou marron

(C) Aucun chat n'est gris et marron

(D) Il existe un chat ni gris ni marron



Du Bac Aux Classes Prépas Exercice d'entraînement

Ecrire la négation des propositions suivantes :

(A) $\forall (x,y)\in E^2,\ xy = yx$

(B) $\exists x\in E, \forall y\in E,\ xy = yx$

(C) $\forall (a,b)\in E^2,\ ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$

(D) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall\varepsilon>0, \exists\eta>0,\ \forall y\in\mathbb{R},\ |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

(E) $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$



Du Bac Aux Classes Prépas Vrai ou Faux ?

1)- P et Q désignent des propositions dépendant d'entiers naturels. On a l'équivalence :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N},\ P(n) \text{ ou } Q(n)\right) \Leftrightarrow \left(\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)\right) \text{ ou } \left(\forall n\in\mathbb{N},\ Q(n)\right)$$

2)- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. R et S désignent respectivement les propositions :

R : « $\forall x\in\mathbb{R}, \exists M>0,\ |f(x)|\leq M|x|$ » et S : « $\exists M>0, \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leq M|x|$ »

a)- On a $S\Rightarrow R$; b)- On a $R\Rightarrow S$

3)- La négation de la proposition « $(AB)\perp(AC)$ » est « $(AB)//(AC)$ »



Du Bac Aux Classes Prépas

Vrai ou Faux ?

Alice vagabonde dans la forêt de l'amnésie où elle est incapable de se souvenir du jour de la semaine. Elle rencontre le lion et la licorne. Le lion ment toujours les lundi, mardi et mercredi tandis que la licorne ment toujours les jeudi, vendredi et samedi. Tous les autres jours les deux bêtes disent toujours la vérité

« Hier était un jour où je mentais » dit le lion ; « Hier était un jour où je mentais » dit la licorne

A partir de ces informations, on peut conclure que

(A) Le lion et la licorne disent la vérité

(B) Le jour de la semaine est dimanche

(C) Le jour de la semaine est jeudi ou dimanche

(D) Le lion ment



Du Bac Aux Classes Prépas

Vrai ou Faux ?

Messieurs Boulanger, Pâtissier et Fleuriste sont trois amis qui ont chacun un métier différent parmi les suivants : boulanger, pâtissier et fleuriste

Mais chacun d'eux n'exerce pas forcément le métier correspondant à son nom.

Sur les informations qui suivent, une seule est vraie :

« Monsieur Pâtissier n'est pas boulanger » ; « Monsieur Fleuriste n'est pas pâtissier »

« Monsieur Pâtissier est pâtissier » ; « Monsieur Fleuriste n'est pas boulanger »

A partir de ces informations, on peut conclure que :

(A) Monsieur Pâtissier est boulanger

(B) Monsieur Boulanger est pâtissier

(C) Monsieur Boulanger est fleuriste

(D) Monsieur Fleuriste est boulanger



Exemple concours TAFEM

Choisir la bonne réponse

Un train (T_1) quitte la ville A en direction de la ville B à $10h$. Il effectuera le trajet à la vitesse constante de $100\,km/h$. Un autre train (T_2) quitte la ville B en direction de la ville A à $11h$, en empruntant le même parcours. Chacun des trains a une longueur de $300m$. Lorsque les 2 trains se rencontrent, le train (T_1) a déjà parcouru $200km$. Les trains se croisent pendant $7,2s$.

(A) Le train (T_2) effectue le trajet à une vitesse constante de $300\,km/h$.

(B) Les villes A et B sont distantes de $200km$.

(C) Le train (T_2) arrivera à la ville B à 13h30.

(D) Si les deux trains avaient chacun une vitesse constante de 100 km/h, ils se seraient croisés pendant 10,6 secondes.



Extrait concours ENSAM Exercice d'entraînement

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes :

P_1 : « La fonction f s'annule »

P_2 : « La fonction f est la fonction nulle »

P_3 : « La fonction f est une fonction constante »

P_4 : « La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur »



Du Bac Aux Classes Prépas Exercice d'entraînement

Soit $x \in \mathbb{R}$, On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

1)- Montrer que : $\forall x \in [0,1[, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, s_n(x) \leq M$

2)- A-t-on : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1[, s_n(x) \leq M$?

3)- A-t-on : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, s_n(x) \leq M$?

12

01

1)- Oui. Il suffit de voir que pour toute valeur donnée $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0)=g(x_0)=0$.

2)- Non. La proposition R signifie que fg est la fonction nulle, mais cela ne signifie pas que f est la fonction nulle ou g est la fonction nulle.

3)- On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x<0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\begin{cases}0 & si \quad x \geq 0 \\ 1 & si \quad x<0\end{cases}$$

Les fonctions f et g ne sont pas des fonctions nulles, mais la fonction fg est nulle.

02

A	B	C	D	E
F	V	F	F	F

La proposition (A) est fausse. Contre-exemple : considérons la fonction définie sur $[0,2]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x \in]1,2] \\ -1 & si \quad x \in [0,1]\end{cases}$$

On a bien « Pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) \neq 0$ », mais la fonction f n'est ni strictement positive sur $[0,2]$ ni strictement négative sur $[0,2]$.

La proposition (B) est vraie. Cela provient de fait que si $a \in \mathbb{R}$: $a \neq 0 \Leftrightarrow (a>0$ ou $a<0)$

La proposition (C) est fausse. La phrase « f n'est pas positive sur $[0,2]$ » signifie qu'il existe un réel $x_0 \in [0,2]$ tel que $f(x_0)<0$, mais pas forcément une fonction négative sur $[0,2]$. A titre d'exemple : $f(x)=x$

La proposition (D) est fausse. La négation de P est la proposition :

$$\overline{P} : « \ \exists x \in [0,2], \ f(x)=0 \ »$$

Ceci ne signifie pas que « f est la fonction nulle sur $[0,2]$ »

La proposition (E) est fausse. La négation de Q est la proposition :

$$\overline{Q} : « \ f \text{ est positive sur } [0,2] \ »$$

Ceci ne signifie pas que « f n'est pas négative sur $[0,2]$ »

03

A	B	C	D	E
V	V	V	V	V

La proposition (A) est vraie. En effet, si $x \in X$ alors $x \geq 0$, donc $x \notin Y$.

La proposition (B) est vraie. En effet, si $z \in Z$, il ne peut pas appartenir à Y.

La proposition (C) est vraie. En effet, si $y \notin Y$, alors $y \geq 0$ et donc $y \in X$.

La proposition (D) est vraie. En effet, si $x \in X$ et $x \in Z$, alors $x \geq 1$ et donc positif.

La proposition (E) est vraie. On a même l'équivalence « $x \in X \cap Z \Leftrightarrow x \geq 1$ »

04

La négation de la proposition (P) est : (C)

Explication : f bornée signifie qu'elle est majorée et minorée à la fois. Il suffit d'utiliser les lois de Morgan pour se convaincre.

05

La négation de la proposition donnée est : (D)

Explication : Même style que l'exercice 04

06

La négation de A : $\exists (x,y) \in E^2, \ xy \neq yx$

La négation de B : $\forall x \in E, \exists y \in E, \ xy \neq yx$

La négation de C : $\exists (a,b) \in E^2, \ ab = 0 \ et \ a \neq 0 \ et \ b \neq 0$

La négation de D : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, \left(|x-y| < \eta \ et \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \right)$

La négation de E : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \ et \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right)$

07

1	2.a	2.b	3
F	V	F	F

1)- La proposition « $\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair » est fausse. De même pour « $\forall n \in \mathbb{N}$, n est impair ». Mais la proposition « $\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair ou n est impair » est vraie.

2)- a)- Si la proposition S est vraie alors il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+^*$ qui convient pour toutes les valeurs de x.

Donc pour chaque x on peut prendre par exemple $M_x = M$ et donc la proposition R est vraie.

b)- On peut prendre comme contre-exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$

3)- Faux. On peut trouver des droites dans le plan qui ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.

08

A	B	C	D
F	F	V	F

On note M l'événement « l'animal ment » et $\bar{M}$ l'événement « l'animal ne ment pas ». Le tableau suivant résume les situations possibles :

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Lion	M	M	M	$\bar{M}$	$\bar{M}$	$\bar{M}$	$\bar{M}$
Licorne	$\bar{M}$	$\bar{M}$	$\bar{M}$	M	M	M	$\bar{M}$

La proposition (A) est fausse. Justification : Le seul jour où les deux animaux disent tous les deux la vérité est le dimanche. Si tel est le cas, le lion ne pourrait pas affirmer « hier était un jour où je mentais » vu qu'il ne ment pas le samedi.

La proposition (B) est fausse. Justification : Pour les raisons évoquées ci-dessus (le discours du lion), le jour ne peut pas être dimanche.

La proposition (C) est vraie. Justification : Il est impossible que le jour de la semaine soit dimanche.

En revanche, il est possible qu'il soit jeudi. En effet, le jeudi, le lion ne ment pas, donc la phrase « hier je mentais » est vraie, ce qui est confirmé par le tableau ci-dessus. La licorne ment le jeudi, donc sa phrase « hier je mentais » est un mensonge, ce qui est confirmé par le tableau ci-dessus

La proposition (D) est fausse. Justification : Puisque nous sommes jeudi, le lion ne ment pas

09

A	B	C	D
V	F	V	F

Notons B , F et P les noms ou professions de Boulanger/Fleuriste/Pâtissier, $\overline{B}$, $\overline{F}$ et $\overline{P}$ leur contraire.

Chaque personne sera repérée par un couple (nom, profession).

L'énoncé nous indique qu'un seul de ces quatre couples est vrai : $(P,\overline{B})$, $(F,\overline{P})$, (P,P) ou $(F,\overline{B})$

La proposition (A) est vraie. Justification : Si la phrase « Monsieur Pâtissier est boulanger » est vraie, alors ceci entraîne que la quatrième hypothèse « Monsieur Fleuriste n'est pas boulanger » est vraie. Comme il ne doit y en avoir qu'une de vraie sur les quatre, les trois autres sont fausses, donc la 3ème hypothèse « Monsieur Pâtissier est pâtissier » est fausse. Il n'y a donc pas de contradiction.

La 1ère hypothèse « Monsieur Pâtissier n'est pas boulanger » est aussi fausse. Il n'y a pas de contradiction.

La 2ème hypothèse « Monsieur Fleuriste n'est pas pâtissier » devant aussi être fausse, on en déduit que Mr Fleuriste est pâtissier, et par déduction, Mr Boulanger est fleuriste.

On obtient ainsi les associations (P,B), (F,P) et (B,F).

La proposition (B) est fausse. Justification : Si la phrase « Monsieur Boulanger est pâtissier » est vraie, cela entraîne que la 2ème hypothèse « Monsieur Fleuriste n'est pas pâtissier » est vraie. Comme il ne doit y en avoir qu'une de vraie sur les quatre, la 1ère hypothèse « Monsieur Pâtissier n'est pas boulanger » est fausse, donc Monsieur Pâtissier est boulanger. Monsieur Fleuriste sera donc fleuriste par déduction. Or ceci entraînerait que la 4ème hypothèse est vraie. Comme il ne doit y en avoir qu'une de vraie sur les quatre, on aboutit à une contradiction. Monsieur Boulanger n'est donc pas pâtissier.

La proposition (C) est vraie. Justification : Si la phrase « Monsieur Boulanger est fleuriste » est vraie, elle n'est pas en contradiction avec les quatre hypothèses.

La proposition (D) est fausse. Justification : Si la phrase « Monsieur Fleuriste est boulanger » était vraie, alors les hypothèses 1 et 4 de l'énoncé « Monsieur Pâtissier n'est pas boulanger » et « Monsieur Fleuriste n'est pas boulanger » seraient vraies, ce qui est interdit. Cette phrase est donc fausse.

10

A	B	C	D
F	V	F	F

La proposition(A) est fausse. Justification : On montre que le train (T_2) roule à une vitesse égale à :

$$\frac{3600\times 400}{7,2}=200\,000m/h=200\,km/h$$

La proposition(B) est vraie. Justification : Lorsque les deux trains se rencontrent, ils ont chacun parcouru $200km$, (T_1) en $2h$ à la vitesse de $100\,km/h$, et (T_2) en $1h$ à la vitesse de $200\,km/h$. Il ne reste plus que $200km$ à chacun d'entre eux pour atteindre les villes B et A, qui sont donc bien distantes de $400km$.

La proposition(C) est fausse. Justification : Puisqu'il lui reste $200km$ à parcourir, le train (T_1) devra encore rouler 2 heures (puisqu'il roule à $100\,km/h$), donc arrivera à $14h$.

La proposition(D) est fausse. Justification : Supposons que les deux trains roulent à $100\,km/h$ en $10,6s$, ils parcourent chacun une distance égale :

$$\frac{100000\times 10,6}{3600}\approx 294m$$

Entre le moment où ils commencent à se croiser, et les $10,6s$ après, ils ne se seront pas totalement croisés, puisqu'ils auront encore $12m$ « en regard »

Exprimons les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs : 11

P_1 : « $\exists x\in I,\ f(x)=0$ » ; P_3 : « $\exists k\in\mathbb{R},\forall x\in I, f(x)=k$ »

P_2 : « $\forall x\in I,\ f(x)=0$ » ; P_2 : « $\forall(x,y)\in I^2, f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$ »

1)- Soit $x\in[0,1[$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $s_n(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Puisque $x^{n+1}\geq 0$ alors $s_n(x)\leq\frac{1}{1-x}$. 12

On peut prendre $M=\frac{1}{1-x}$. On a donc : $\forall x\in[0,1[,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ s_n(x)\leq M$

2)- Oui, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$, $s_n(x)\leq n+1$. On peut prendre $M=n+1$ .donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists M\in\mathbb{R},\forall x\in[0,1[,\ s_n(x)\leq M$$

3)-Pas forcément. Si c'était le cas, on aura $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} s_n(x)\leq M$, c'est-à-dire $n+1\leq M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Mais cela entraîne donc que la suite $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, ce qui est évidement faux.

LES GRANDS TYPES DE RAISONNEMENT

Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x}$. On cherche à savoir si f est dérivable à droite en 0 ou non. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est le produit de la fonction $x\mapsto x$ avec la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ »

Ces deux fonctions sont définies et continues sur $[0,+\infty[$, mais la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0. Il s'ensuit que f n'est pas dérivable à droite en 0 en tant que produit de deux fonctions dont l'une n'est pas dérivable en 0.

Ce raisonnement est-il exact ?

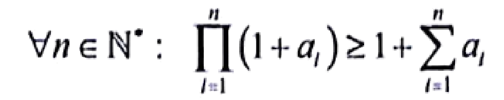


Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: 11 divise $5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$

2)- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

3)- Soit $(a_n)_{n\geq1}$ une suite de nombres positifs. Montrer par récurrence que :



$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Soit $a\in\,]0,1[$. Prouver que pour tout $n\geq2$: $\quad 1-na<(1-a)^n<\dfrac{1}{1+na}$

2)- Montrer que le nombre $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

3)- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)\leq 3-\dfrac{1}{n}$

4)- Prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad x^2-x+1\geq|x-1|$

5)- Résoudre les inéquations suivantes : $\quad(I_1): |x+2|\geq\dfrac{1-x}{1+x}\quad ; \quad (I_2): x+1\leq\sqrt{x+2}$



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_{n+2}=(n+1)(u_{n+1}+u_n)$

Montrer que : $\quad\forall n\geq2,\ (n-1)!\leq u_n\leq n!$



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Sachant que $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

2)- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \geq 4^{n+2}+3^{n+2}$

3)- Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouver que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

4)- Soient $a_1, a_2, \ldots, a_9$ neuf entiers naturels tels que : $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 90$

Prouver qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure à 30.



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Un coffre-fort est muni de n serrures différentes et ne s'ouvre que si ces n serrures sont ouvertes à la fois. On considère 5 personnes A, B, C, D et E ; on demande de choisir l'entier n le plus petit possible et de distribuer des clefs à ces 5 personnes (on dispose de chaque clef en autant d'exemplaires que l'on veut) pour que le coffre-fort ne puisse être ouvert que par A et B ensemble, ou bien par A, C, D ensemble, ou bien par B, D, E ensemble.



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Extrait concours ENSAM — Exercice d'entraînement

Soit $H(n)$ un énoncé dépendant de l'entier n. Les assertions suivantes entraînent-elles que $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(A) $H(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+1))$

(B) $H(1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+1))$

(C) $H(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n+1) \Rightarrow H(n))$

(D) $H(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+2))$

(E) $H(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+2))$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n+1) \Rightarrow H(n))$

(F) $H(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(2n))$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n+1) \Rightarrow H(n))$

(G) $H(0)$ et $H(1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(2n))$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n+1) \Rightarrow H(n))$



C1

Ce raisonnement n'est pas exact puisque :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$

Donc f est dérivable à droite en zéro.

L'erreur vient du fait que si f est dérivable en x_0 et g n'est pas dérivable en x_0, on ne peut pas avoir une conclusion relative au produit $f\times g$.

C'est la confusion entre la somme et le produit que l'exercice veut tester.

C2

1)- Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$

- On a $u_0=22$ donc 11 divise u_0.
- Supposons que 11 divise u_n et montrons que 11 divise u_{n+1}.

  Soit $k\in\mathbb{Z}$ tel que $u_n=11k$. On a alors :

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=5^{5n+6}+4^{5n+7}+3^{5n+5}\\&=3125\times 5^{5n+1}+4^{5n+7}+3^{5n+5}\\&=3125\times\left(u_n-4^{5n+2}-3^{5n}\right)+4^{5n+7}+3^{5n+5}\\&=3125u_n-4^{5n+2}(3125-1024)-3^{5n}(3125-243)\\&=3125u_n-2101\times 4^{5n+2}-2882\times 3^{5n}\\&=11\left(3125k-191\times 4^{5n+2}-262\times 3^{5n}\right)\end{aligned}$$

  Avec $\left(3125k-191\times 4^{5n+2}-262\times 3^{5n}\right)\in\mathbb{Z}$

- Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$: 11 divise $5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$

2)- Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

- Pour $n=1$, on a bien $\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$
- Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

- Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

3)- Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$

- Pour $n=1$, on a bien : $1+a_1\geq 1+a_1$
- Supposons que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$ et montrons que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n+1}a_i$

On a :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i\Rightarrow\left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right)(1+a_{n+1})\geq\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)(1+a_{n+1})$$

$$\Rightarrow\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}+a_{n+1}.\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$\Rightarrow\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n+1}a_i$$

- Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$

03

1)- Soit $a\in\,]0,1[$. Montrons par récurrence que pour tout $n\geq 2$: $1-na<(1-a)^n<\dfrac{1}{1+na}$

- Pour $n=2$, on a : $1-2a<(1-a)^2<\dfrac{1}{1+2a}$. En effet :

$(1-a)^2-(1-2a)=a^2$ et $a^2>0$ et $\dfrac{1}{1+2a}-(1-a)^2=\dfrac{1}{1+2a}-(1-2a+a^2)=\dfrac{3a^2(1-a)}{1+2a}$

et $\dfrac{3a^2(1-a)}{1+2a}>0$

- Supposons que $1-na<(1-a)^n<\dfrac{1}{1+na}$ et montrons que $1-(n+1)a<(1-a)^{n+1}<\dfrac{1}{1+(n+1)a}$

On a :

$$1-na<(1-a)^n<\frac{1}{1+na}\Rightarrow(1-na)(1-a)<(1-a)^{n+1}<\frac{1-a}{1+na}$$

$$\Rightarrow 1-(n+1)a+na^2<(1-a)^{n+1}<\frac{1-a}{1+na}$$

De plus : $1-(n+1)a<1-(n+1)a+na^2$ et $\dfrac{1}{1+(n+1)a}-\dfrac{1-a}{1+na}=\dfrac{(n+1)a^2}{(1+(n+1)a)(1+na)}$

Donc : $$1-(n+1)a<(1-a)^{n+1}<\frac{1}{1+(n+1)a}$$

- Conclusion : $\forall n\geq 2$, $1-na<(1-a)^n<\dfrac{1}{1+na}$

2)- Par l'absurde, supposons que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est rationnel, on peut alors écrire : $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}=\dfrac{a}{b}$ avec $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ avec $b\neq 0$. On aura alors $b\ln 2=a\ln 3$ et donc $\ln 2^b=\ln 3^a$, d'où $2^b=3^a$. Ceci c'est absurde car 2^b est pair et 3^a est impair. Par conséquent : $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

3)- Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)...\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)\leq 3-\dfrac{1}{n}$

- Pour $n=1$, on a bien : $1+\dfrac{1}{1^3}\leq 3-\dfrac{1}{1}$.
- Supposons que $\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)...\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)\leq 3-\dfrac{1}{n}$ et montrons que :

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)...\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leq 3-\frac{1}{n+1}$$

On a : $\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)...\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)\leq 3-\dfrac{1}{n}$, donc :

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)...\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leq\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

Pour terminer la démonstration, il suffit alors de vérifie que :

$$\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leq\left(3-\frac{1}{n+1}\right)$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$\left(3-\frac{1}{n+1}\right)-\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)=\frac{n^2-n+2}{n(n+1)^3}$$

Puisque $\frac{n^2-n+2}{n(n+1)^3}\geq 0$ alors $\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leq\left(3-\frac{1}{n+1}\right)$ ce qui achève la démonstration.

- Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)...\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\leq 3-\frac{1}{n}$

4)- Prouvons que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x^2-x+1\geq|x-1|$

- On va faire une étude des cas :
  - Si $x\geq 1$ alors $|x-1|=x-1$ et donc : $x^2-x+1-|x-1|=x^2-2x+2$

    Le discriminant de x^2-2x+2 est strictement négatif, donc $x^2-2x+2\geq 0$, et par conséquent $x^2-x+1\geq|x-1|$
  - Si $x\leq 1$ alors $|x-1|=1-x$ et donc : $x^2-x+1-|x-1|=x^2$ et $x^2\geq 0$.

    Donc : $x^2-x+1\geq|x-1|$
- Conclusion : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x^2-x+1\geq|x-1|$

5)- Résolvons l'inéquation : (I_1): $|x+2|\geq\frac{1-x}{1+x}$

- On va faire une étude des cas :
  - Si $x\in[-2,+\infty[$, (I_1) est équivalente à $x+2\geq\frac{1-x}{1+x}$, c'est-à-dire : $\frac{x^2+4x+1}{x+1}\geq 0$

    L'ensemble des solutions de (I_1) dans $[-2,+\infty[$ est : $S_1=[-2,-1[\cup[-2+\sqrt{3},+\infty[$
  - Si $x\in]-\infty,-2]$, (I_1) est équivalente à $-x-2\geq\frac{1-x}{1+x}$, c'est-à-dire : $\frac{x^2+2x+3}{x+1}\leq 0$

    L'ensemble des solutions de (I_1) dans $]-\infty,-2]$ est : $S_2=]-\infty,-2]$
- Conclusion : L'ensemble des solutions de (I_1) est : $S=S_1\cup S_2=]-\infty,-1[\cup[-2+\sqrt{3},+\infty[$

Résolvons l'inéquation : (I_2): $x+1\leq\sqrt{x+2}$

L'inéquation (I_2) n'a de sens que si $x\in[-2,+\infty[$. Soit alors $x\in[-2,+\infty[$, on a :

$$(I_2)\Leftrightarrow\left[\left((x+1)^2\leq x+2 \text{ } et \text{ } x+1\geq 0\right) ou \text{ } (x\leq -1)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\left[x^2+x-1\leq 0 \text{ } et \text{ } x+1\geq 0\right] ou \text{ } (x\leq -1)\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \text{ ou } x \in [-2,-1]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions de (I_2) est : $S = \left[-2, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

04

Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 2,\ (n-1)! \leq u_n \leq n!$

- On a $n=2$: $u_2 = 2$ et $1! \leq u_2 \leq 2!$
- Supposons que $(n-1)! \leq u_n \leq n!$ et $n! \leq u_{n+1} \leq (n+1)!$ et montrons que : $(n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+2)!$

On a : $$n! + (n-1)! \leq u_{n+1} + u_n \leq (n+1)! + n!$$

Donc : $$(n-1)!(n+1) \leq u_{n+1} + u_n \leq n!(n+2)$$

En multipliant les membres par $(n+1)$, on obtient: $(n-1)!(n+1)^2 \leq u_{n+2} \leq (n+2)!$

Or : $n! \leq (n-1)!(n+1)$ donc $(n+1)! \leq (n-1)!(n+1)^2$ et par conséquent :

$$(n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+2)!$$

- Conclusion : $\forall n \geq 2,\ (n-1)! \leq u_n \leq n!$

05

1)- Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ et posons : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = q$ avec $q \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, on aura :

$\sqrt{2}+\sqrt{3} = q-\sqrt{5}$, donc $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(q-\sqrt{5}\right)^2$, c'est-à-dire $2\sqrt{6}+2\sqrt{5}\,q = q^2$, ce qui donne

$24+20q^2+8q\sqrt{30} = q^4$, d'où $\sqrt{30} = \frac{q^4-20q^2-24}{8q}$ et donc $\sqrt{30} \in \mathbb{Q}$, ce qui contradictoire.

2)- Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \geq 4^{n+2}+3^{n+2}$

- Pour $n=0$, on a bien : $5^2 \geq 4^2+3^2$
- Supposons que $5^{n+2} \geq 4^{n+2}+3^{n+2}$ et montrons que $5^{n+3} \geq 4^{n+3}+3^{n+3}$

On a : $5^{n+2} \geq 4^{n+2}+3^{n+2}$, donc $5^{n+3} \geq 5\left(4^{n+2}+3^{n+2}\right)$. De plus, on a :

$$5\left(4^{n+2}+3^{n+2}\right)-4^{n+3}-3^{n+3} = 4^{n+2}+2\times 3^{n+2} \quad \text{et} \quad 4^{n+2}+2\times 3^{n+2} \geq 0$$

Par conséquent : $5^{n+3} \geq 4^{n+3}+3^{n+3}$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$

3)- Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons l'implication $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

Il suffit de faire une démonstration par contraposée, en prouvant que $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon)$

Comme $a \neq 0$ alors $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ convient et répond à la question. D'où le résultat.

4)- Soient $a_1, a_2, \ldots, a_9$ neuf entiers naturels tels que : $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 90$

Prouvons par l'absurde qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Supposons le contraire. Dans ce cas, on aura par exemple : (après une reindexation éventuelle)

$$a_1 + a_2 + a_3 < 30 \quad \text{et} \quad a_4 + a_5 + a_6 < 30 \quad \text{et} \quad a_7 + a_8 + a_9 < 30$$

Ceci entraîne que : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 < 90$ et donc $90 < 90$. D'où le résultat.

06

Considérons cinq variables propositionnelles A, B, C, D et E. À chaque situation possible (présence d'un certain nombre de gens parmi la personne A, la personne B, la personne C, la personne D et la personne E), on associe une distribution de valeurs de vérités sur notre ensemble de variables, de la façon suivante :

- si A est présente, alors A est vraie (*i.e.* la variable A vaut 1), sinon elle est fausse (elle vaut 0).
- si B est présent, alors B est vraie, sinon B est fausse.
- idem pour C, D et E

La formule d'ouverture du coffre s'écrit alors aisément en fonction de nos variables propositionnelles :

Le coffre s'ouvre si et seulement si :

- A et B sont là, c'est-à-dire $(A \, et \, B)$ vaut 1.
- Ou alors A, C et D sont là, c'est-à-dire $(A \, et \, C \, et \, D)$ vaut 1.
- Ou enfin B, D et E sont là, c'est-à-dire $(B \, et \, D \, et \, E)$ vaut 1.

Autrement dit, la formule d'ouverture du coffre s'écrit :

$$(A \, et \, B) \; ou \; (A \, et \, C \, et \, D) \; ou \; (B \, et \, D \, et \, E)$$

En utilisant les règles de distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction et réciproquement, on peut alors transformer cette écriture, pour passer d'une disjonction de conjonctions au contraire (conjonctions de disjonctions). Cette transformation formelle semble anodine, mais nous allons voir qu'elle permet de répondre directement à notre problème. Transformons donc. Pour faciliter la lecture, nous allons d'abord transformer une partie seulement de l'expression :

$$[(A \, et \, B) \; ou \; (A \, et \, C \, et \, D)] \Leftrightarrow [A \; ou \; (A \, et \, C \, et \, D)] \; et \; [B \; ou \; (A \, et \, C \, et \, D)]$$

On sait que : $\left(P \text{ et } (P \text{ ou } Q)\right) \Leftrightarrow P$

On obtient en prenant $P = A$ et $Q = (C \text{ et } D)$:

$$A \text{ ou } (A \text{ et } C \text{ et } D) \Leftrightarrow A \text{ et } \left(B \text{ ou } (A \text{ et } C \text{ et } D)\right)$$
$$\Leftrightarrow A \text{ et } (B \text{ ou } A) \text{ et } (B \text{ ou } C) \text{ et } (B \text{ ou } D)$$
$$\Leftrightarrow A \text{ et } (B \text{ ou } C) \text{ et } (B \text{ ou } D)$$

De la même façon, on montre que :

$$A \text{ ou } (B \text{ et } D \text{ et } E) \Leftrightarrow (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } D) \text{ et } (A \text{ ou } E)$$

De Plus :

$$\left[(B \text{ et } D) \text{ ou } (B \text{ et } D \text{ et } E)\right] \Leftrightarrow (B \text{ ou } D)$$

On obtient donc comme expression pour la formule du coffre :

$$(A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } D) \text{ et } (A \text{ ou } E) \text{ et } (B \text{ ou } C) \text{ et } (B \text{ ou } D)$$

Il ne reste plus qu'à interpréter cette formule en termes de coffre-fort. Ceci signifie qu'il sera ouvert lorsque seront réunis :

- Alice ou Bernard, à qui l'on donne donc une clé (chacun) de la première serrure.
- Alice ou Dominique, à qui l'on donne une clé de la deuxième serrure.
- Alice ou Emile, à qui l'on donne une clé de la troisième serrure.
- Bernard ou Christine, à qui l'on donne une clé de la quatrième serrure.
- Bernard ou Dominique, à qui l'on donne une clé de la cinquième serrure.

C'est-à-dire cinq serrures suffisent à répondre au problème. Comme de plus aucune des conditions précédentes n'est conséquence des autres (par exemple, si seuls Alice et Christine sont présentes, les quatre premières conditions sont réunies, mais pas la cinquième), il faut donc au moins cinq serrures.

En définitive : Il faut cinq serrures.

07

Par l'absurde, supposons que : $a(1-b) > \frac{1}{4}$ et $b(1-c) > \frac{1}{4}$ et $c(1-a) > \frac{1}{4}$.

En multipliant les membres de ces inégalités, on obtient :

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{64}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

Donc $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ et $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Par conséquent : $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64}$. Contradiction

Soit $H(n)$ un énoncé dépendant de l'entier n.

- L'énoncé (A) : **Oui**

  C'est du cours

- L'énoncé (B) : **Non**

  Contre-exemple : considérons l'énoncé $H(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ »

  On a $H(1)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ est vraie (ceci car $H(n+1)$ l'est)

  Cependant, l'énoncé $H(0)$ est faux car $0 < 1$.

- L'énoncé (C) : **Non**

  Contre-exemple : considérons l'énoncé $H(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 0$ »

  On a $H(0)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}, H(n+1) \Rightarrow H(n)$ est vraie (car $H(n+1)$ est fausse)

  Cependant, l'énoncé $H(n)$ est faux.

- L'énoncé (D) : **Non**

  Contre-exemple : considérons l'énoncé $H(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est pair»

  On a $H(0)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}, H(n) \Rightarrow H(n+2)$ est vraie , car les entiers n et $n+2$ ont la même parité. Cependant, l'énoncé $H(n)$ est faux.

- L'énoncé (E) : **Oui**

  Puisque $H(0)$ est vraie et $H(0) \Rightarrow H(2)$ alors $H(2)$ est vraie. De l'implication $H(2) \Rightarrow H(1)$

  On en déduit que $H(1)$ est vraie.

  Puisque $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies et que pour tout $n \in \mathbb{N}, H(n+1) \Rightarrow H(n) \Rightarrow H(n+2)$ est vraie, alors $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- L'énoncé (F) : **fausse**

  Contre-exemple : considérons l'énoncé $H(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 0$ »

- L'énoncé (G) : **Oui**

  On a $H(1)$ est vraie et $H(1) \Rightarrow H(2)$, donc $H(2)$ est vraie. Puisque $H(2) \Rightarrow H(4)$, alors $H(4)$ est vraie. De plus, $H(4) \Rightarrow H(3)$, donc $H(3)$ est vraie. Comme $H(3) \Rightarrow H(6)$ alors $H(6)$ est vraie. De plus, $H(6) \Rightarrow H(5)$, donc $H(5)$ est vraie, et ainsi de suite. On en déduit alors que $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.



LOGIQUE ET TAGE-MAGE

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

COR

LIQ

PYW

BAX

XWY ? *BAC* *KJL* *QPR*

(A) *FED* (B) *IHJ* (C) *VUW* (D) *QOP*



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

SVA

KNA

OTW *CMP* *UDG* ? *QPR*

GJB

EHE

(A) *DGI* (B) *MPS* (C) *SWZ* (D) *PRU*



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

EPP

FAF

GLP

AML *OUT* *IFE* ? *TRQ*

IBR

(A) *YNM* (B) *HEG* (C) *YSR* (D) *HJI*



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Un journal quotidien paraît sur 16 pages de format $33\,cm$ sur $50\,cm$. Il est tiré chaque jour à 40000 exemp-Aires. Quelle superficie de papier utilise-t-on environ chaque jour ?

(A) $1000\,m^2$ (B) $1\,km^2$ (C) $100\,ha$ (D) $10^9\,cm^2$



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

	KLA			
CFH	?	EDJ	FCK	GBL
	PQO			
	UVF			
	JKY			

(A) *BGI* (B) *DEI* (C) *MNO* (D) *RSA*

05

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

	OPY			
DAR	?	JYN	MEL	PUJ
	LPO			
	POC			
	ORS			

(A) *SOP* (B) *GOP* (C) *GLP* (D) *GNO*

06

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

		GHI		
		UVW		
UPS	QSR	?	SEP	ASO
		DEF		
		LMN		

(A) *YZA* (B) *SRQ* (C) *TUV* (D) *OPQ*

07

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Avec une photocopieuse, on réduit de 20% l'aire d'un carré de $10cm$ de côté. On s'aperçoit que la figure est trop petite, mais l'original a été détruit.

De quel pourcentage faut-il agrandir l'aire du carré obtenu pour retrouver le carré initial ?

(A) 20% (B) 25% (C) 30% (D) 80%

08

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

		BPC		
		DFE		
DQB	*EPA*	?	*GNB*	*HMY*
		HFI		
		JIK		

(A) *FOG* (B) *LFG* (C) *HOG* (D) *FOE*



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

	KIV			
	QOX			
NTV	?	*ODF*	*RSU*	*AVX*
	NLS			
	FDJ			

(A) *FDE* (B) *USA* (C) *IGI* (D) *PRT*



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

				CHF
				OPN
NEN	*EDD*	*SSE*	*TET*	?
				AFD
				SWU

(A) *GGE* (B) *XEX* (C) *REE* (D) *EDB*



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

En achetant $4kg$ de pêches et de $3kg$ de tomates, j'ai payé $62DH$. Une semaine après, j'achète les mêmes quantités pour $57,70DH$, car les pêches ont baissé de 20% et les tomates ont augmenté de 25% .

Quel était le prix initial du $1kg$ de pêche ?

(A) $10DH$ (B) $11DH$ (C) $12DH$ (D) $13DH$



Extrait concours ENSA — Choisir la bonne réponse

Deux augmentations successives de 10% du prix d'un produit donne une augmentation de :

(A) 17% (B) 19% (C) 21% (D) 23%

13

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

(A) Plus le périmètre d'une figure est grand, plus son aire est étendue.

(B) Si deux figures ont la même aire leur périmètre est le même.

(C) On peut fabriquer des figures d'aire très petite et de périmètre très grand.

(D) L'aire d'une figure est toujours plus grande que son périmètre.

14

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Un skieur de fond a calculé que s'il skie à $10\,km/h$ en moyenne, il arrivera à destination à $13\,heures$. Mais s'il à $15\,km/h$ en moyenne, il arrivera à destination à $11\,heures$. A quelle vitesse moyenne doit-il skier pour toucher son but à midi ?

(A) $11,5\,km/h$ (B) $12,5\,km/h$ (C) $13,5\,km/h$ (D) $12\,km/h$



15

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Deux cyclistes vont à la rencontre l'un de l'autre, le premier fait du $18\,km/h$ et le second du $22\,km/h$.

Si au moment identique où ils démarrent ils sont séparés de 54 km, au bout de combien de temps se rencontreront-ils ?

(A) $80\,mn$ (B) $81\,mn$ (C) $82\,mn$ (D) $83\,mn$



16

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Un robinet placé en haut d'un bassin le remplirait en 9 heures, tandis qu'une vanne placée à la base le viderait en 15 heures. Le bassin est vide. On ouvre alors le robinet et la vanne, au bout de combien de temps le bassin sera-t-il rempli ?

(A) $22h10mn$ (B) $22h20mn$ (C) $22h30mn$ (D) $22h40mn$

17

Examen type HEM — Vrai ou Faux ?

1)- Lorsqu'on effectue deux remises successives de 7%, puis de 20%, l'ordre importe peu.

2)- Une augmentation de 12% suivie d'une baisse de 12% cela ne change rien.



18

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

GAB

FBB

AHA

? *RTX* *MOO* *EGH* *QSB*

ECB

(A) *XZY* (B) *BDD* (C) *PRI* (D) *AFC*

19

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

KOR

ILP

LOR *EHK* *ORU* ? *GJM*

DEH

YBS

(A) *UWY* (B) *ADG* (C) *JMP* (D) *UXR*

20

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

YBT

UZC

BRU *CTX* ? *EXD* *FZG*

BEW

XCF

(A) *GGE* (B) *DUY* (C) *XXX* (D) *DVA*

21

Du Bac Aux Classes Prépas Exercices d'entraînement

En 2009, le bénéfice d'une entreprise était de 100000 *Dhs*.

En 2010, ce bénéfice a baissé de 10%, puis en 2011, on envisage une hausse de 15%.

1)- Calculer le pourcentage global d'évolution du bénéfice entre 2009 et 2011.

2)- Calculer le pourcentage moyen annuel d'évolution du bénéfice.

22

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Deux machines M_1 et M_2 embouteillent de l'eau. M_1 travaille 7 fois plus vite que M_2. M_1 remplit x bouteilles par minute ; les deux machines sont utilisées pendant 3 heures.

Combien de bouteilles a-t-on remplies?

(A) $\frac{8}{7}x$ (B) $180\left(x+\frac{1}{7}\right)$ (C) $\frac{1440}{7}x$ (D) $\frac{180}{7}x$



Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Un étudiant achète 2 livres dont le coût est identique. Il revend le premier au bout d'un an avec 25% de perte et le deuxième au bout de deux ans avec 40% de perte. La revente des 2 livres lui a alors rapporté $675Dh$. Quel était le prix d'achat de l'un d'entre eux ?

(A) $450DH$ (B) $500DH$ (C) $550DH$ (D) $600DH$



Choisir la bonne réponse

La solution X est composée de 25% de mercure et la solution Y est composée de 10% de mercure.

Le mélange Z est composé $12cl$ de solution X et $13cl$ de solution Y.

Quel pourcentage (approximativement) de mercure y a-t-il dans cette solution ?

(A) 17% (B) 19% (C) 21% (D) 23%



Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Chez le concessionnaire automobile X, le bénéfice net résultant des ventes de voitures a augmenté de 10% entre Janvier 2003 et Janvier 2004. Pourtant, sur la même période, le nombre de voitures vendues a diminué de 10% Quelle a été approximativement l'augmentation moyenne en % du bénéfice net par voiture vendue entre Janvier 2003 et Janvier 2004 ?

(A) 20 (B) 22 (C) 23 (D) 25



Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Votre employeur a augmenté votre salaire de 16%. Votre nouveau salaire brut est $6575DH$. Trouvez parmi les propositions ci-dessous, l'augmentation de votre salaire net en DH si les retenus représentent 18% du salaire brut :

(A) 733,66 (B) 743,66 (C) 753,67 (D) 763,67

Choisir la bonne réponse

Exemple Concours TAFEM

En établissant l'inventaire des livres de la bibliothèque municipale, on remarque que :

- Tous les livres français étaient reliés en rouge.
- Tous les livres étrangers avaient plus de 200 pages.
- Seuls des livres rouges avaient des illustrations.
- Seuls des livres de plus de 200 pages avaient un index.

En tenant compte de ces affirmations, cochez les livres qui ne peuvent pas venir de cette bibliothèque :

(A) Un livre rouge espagnol.

(B) Un livre avec des illustrations et un index.

(C) Un livre français de 85 pages avec un index.

(D) Un livre de 600 pages, relié en rouge et sans index.



Choisir la bonne réponse

Exemple Concours TAFEM

Pour chacune des séries suivantes, notez les chiffres qui s'inscrivent logiquement sur les pointillés:

<u>Série 1 :</u> 7 – 6 – 8 – 5 – 9 – 4 – ………

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

<u>Série 2 :</u> 17 – 22 – 22 – 24 – 29 – 29 – 31 – 36 – ………

(A) 32 (B) 36 (C) 39 (D) 42

<u>Série 3 :</u> 232 – 116 – 124 – 62 – 70 – 35 – ………

(A) 17 (B) 21 (C) 28 (D) 43

<u>Série 4 :</u> 18 – 24 – 29 – 33 – 36 – 38 – ………

(A) 30 (B) 33 (C) 37 (D) 39



Choisir la bonne réponse

Exemple Concours TAFEM

Pour chacune des séries suivantes, notez les chiffres ou les lettres qui s'inscrivent logiquement sur les pointillés:

<u>Série 1 :</u> AZ – DW – GT – JQ – MN – PK – ………

(A) *SH* (B) *RS* (C) *TU* (D) *VW*

<u>Série 2 :</u> JK – 21 – ML – 34 – NO – 65 – ………

(A) *ED* (B) *YX* (C) *VU* (D) *PQ*



Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Pour chacune des séries suivantes, notez les chiffres qui s'inscrivent logiquement sur les pointillés:

Série 1 : ……… – 52 – 104 – 100 – 103 – 206 – 202

(A) 45 (B) 49 (C) 50 (D) 23

Série 2 : 9,42 – 11,25 – 13,08 – 14,51 – ………

(A) 12,49 (B) 14,39 (C) 16,34 (D) 18,05

Série 3 : 1485 – 495 – 504 – 168 – 177 – 59 – ………

(A) 17 (B) 21 (C) 28 (D) 68

Série 4 : 7 – 26 – 63 – 124 – 215 – ………

(A) 245 (B) 423 (C) 300 (D) 342

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

Vous disposez d'une somme qui représente le montant total de 3 factures. Le montant de la 1ère facture est égal aux $\frac{3}{7}$ de la somme totale ; le montant de la 2ème est égal aux $\frac{3}{4}$ du reste. Au moment de payer la 3ème facture, vous bénéficiez d'une réduction imprévue de 10% sur cette troisième facture. Il vous reste alors $250DH$. Quelle est la somme totale des trois factures ?

(A) $17500DH$ (B) $17000DH$ (C) $16500DH$ (D) $18000DH$

Exemple Concours TAFEM Exercice d'entraînement

Donner pour chacune des figures suivantes, en justifiant votre choix, le groupe de numéros qui s'inscrit logiquement à la place des points d'interrogation ?

figure 1

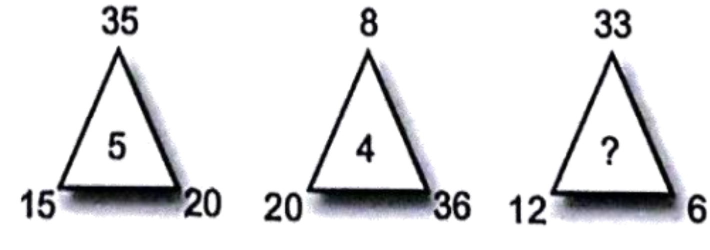
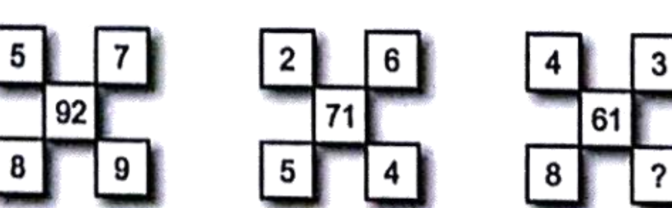


figure 2



Exemple Concours TAFEM

Choisir la bonne réponse

Quel groupe de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

GHU

AEG *TOU* ? *EMI* *AUS*

PNO

RSL

DEV

(A) *YAR* (B) *IFA* (C) *EPQ* (D) *OIJ*

54

Exemple Concours TAFEM

Choisir la bonne réponse

Quel groupe de chiffres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

142

366

214

112

589 256 701 ? 034

(A) 145 (B) 690 (C) 234 (D) 478

55

Exemple Concours TAFEM

Choisir la bonne réponse

Quel groupe de chiffres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

981

422

624

240 304 ? 528 192

817

(A) 516 (B) 642 (C) 752 (D) 211

56

Exemple Concours TAFEM

Choisir la bonne réponse

Quelle figure complète logiquement la grille ?

1 2 3 4 5 6

57

Exemple Concours TAFEM

Exercice d'entraînement

Donner pour chacune des figures suivantes, en justifiant votre choix, le groupe de numéros qui s'inscrit logiquement à la place des points d'interrogation ?

figure 1

5	3	8	2
4	2	6	2
9	5	?	?
1	1	2	0

figure 2

3	9	6	2
10	6	4	4
21	27	6	?
6	8	7	?

figure 3

2	4	1	7
4	5	12	8
6	3	15	?
5	3	7	?



Exemple Concours TAFEM

Exercice d'entraînement

Donner pour chacune des figures suivantes, en justifiant votre choix, le groupe de numéros qui s'inscrit logiquement à la place des points d'interrogation ?

figure 1

7	3	9	1
4	8	2	10
6	9	5	10
5	2	?	?

figure 2

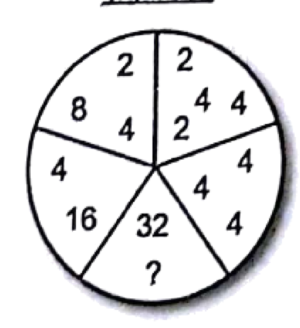
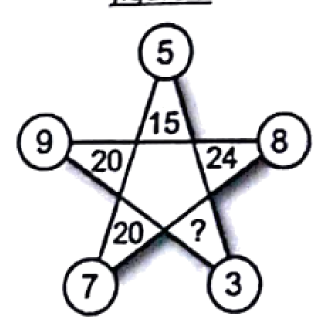


figure 3





Du Bac Aux Classes Prépas

Exercice d'entraînement

Le prix d'un téléviseur était de $2000 Dhs$ en 2001 et de $1600 Dhs$ en 2002.

1)- Calculer, en pourcentage du prix initial, la baisse du prix du téléviseur.

2)- Le taux de baisse annuel est resté globalement le même depuis 2002.

Quel était le prix du téléviseur en 2003.

3)- A partir de quelle année le prix du téléviseur sera-t-il inférieur à 30% du prix initial ?



01

Horizontalement : trois lettres qui se suivent dans l'alphabet, la première étant au centre, la suivante en tête, et la troisième en troisième place B – A – C (Attention aux réponses A et D où les lettres viennent dans un ordre différent). Donc les solutions possibles : B), C).

Verticalement : tous les groupes contiennent une voyelle au centre avec des consonnes de chaque côté. Dans ce cas les solutions possibles : A), C), D).

La bonne réponse est alors C.

02

Horizontalement : les deux dernières lettres se suivent dans l'alphabet avec un écart de $+3$.

Ne pas oublier que l'alphabet fait une boucle, donc le dernier groupe suit bien la même logique, B étant 3 lettres après Y (YZAB). Les solutions possibles sont : B), C), D).

Verticalement : pour une fois, les deux alignements suivent la même logique : les deux premières lettres se suivent dans l'alphabet avec un écart de $+3$. Solutions possibles : A), B).

La bonne réponse est alors B.

03

Horizontalement : les deux dernières lettres sont en ordre alphabétique inversé. Les solutions possibles sont donc : A), C), D).

Verticalement : la première lettre de chaque groupe forme une progression alphabétique croissante (E-F-G-H-I). Il manque donc un groupe commençant avec H. Donc, les solutions possibles sont : B), D).

La bonne réponse est alors D.

04

L'aire de papier nécessaire en m^2 par jour est donnée par la formule numérique :

$$40000 \times 16 \times 0,33m \times 0,5m = 105600m^2$$

La bonne réponse est alors D. (Remarquer bien que $10^9 cm^2 = 100000m^2$)

05

Horizontalement : les premières lettres de chaque groupe forment une série alphabétique croissante (manque D). Les secondes lettres de chaque groupe forment une série alphabétique décroissante (manque E). Troisièmes lettres de chaque groupe forment une série croissante (manque I). La seule solution possible est : B

Verticalement : dans chaque groupe les deux premières lettres sont en ordre alphabétique croissant. Les solutions possibles sont : B , C ou D

En définitive, la bonne réponse est alors B

06

Horizontalement : la première lettre de chaque groupe forme une série où on progresse dans l'alphabet en sautant deux lettres à chaque fois. Les solutions possibles sont : B ou D.

Verticalement : chaque groupe contient un O qui progresse d'abord vers la droite, puis vers la gauche. Par conséquent, les solutions possibles dans : A ou B.
La bonne réponse est alors B.

07

Horizontalement : les lettres de chaque groupe reculent dans l'alphabet selon l'ordre : -2 , -1 (PONM, SRQP, etc.). On préfèrera peut-être lire de droite à gauche pour que la régularité devienne évidente.
Les solutions possibles : A), B), D).
Verticalement : chaque groupe contient un D, et en considérant l'ensemble de haut en bas, on voit que le D se décale tout d'abord vers la droite et ensuite vers la gauche.
On retrouve ce mouvement de va et vient dans plusieurs exercices des concours. Le groupe à trouver devra donc avoir un D en troisième position. Le critère « contient un D », sans tenir compte de la position, permet la solution D) et il n'y a pas de réponse unique. Les solutions possibles : A), C).
La bonne réponse est donc A.

08

Le contraire d'enlever 20%, c'est ajouter 25%. On passe de 100 à 80, puis on revient à 100 en ajoutant 20 à 80 , or $\frac{20}{80}$ c'est un quart. La bonne réponse est alors B.

09

Horizontalement : la première lettre de chaque groupe avance dans l'alphabet (D – E –... – G – H).
Nous cherchons donc un ensemble qui commence avec F. (Solutions possibles A, D et E) et D). La seconde lettre de chaque groupe recule d'une place dans l'alphabet (Q – P – ... – N – M), il faut donc un ensemble qui a également un O en seconde lettre (solutions possibles A, C et D). Les solutions possibles avec les deux critères : A), D).
Verticalement : les lettres progressent dans l'alphabet et passant de la première à la dernière lettre de chaque groupe et de groupe en groupe en descendant B – C/D – E/...-.../H – I/J – K. Il manque donc un groupe qui commence par F et se termine par G. La seule solution possible est : A).
La bonne réponse est donc A.

10

Horizontalement : les deux dernières lettres de chaque groupe se suivent à une lettre d'écart (TUV-DEF - etc.). les solutions possibles sont : C), D).
Verticalement : Les deux premières lettres de chaque groupe se suivent à rebours avec un écart d'une lettre : (KJL - QPO- ...etc.). Les solutions possibles sont donc : A), B), C).
La bonne réponse est donc C.

11

Horizontalement : deux consonnes identiques et un E par groupe. Les solutions possibles : A), B), C).
Verticalement : les deux dernières lettres de chaque groupe se suivent à rebours avec un écart d'une lettre : HGF, PON, ..., etc. Les solutions possibles sont : A), D). La bonne réponse est donc A.

12

Soit x le prix initial en DH d'un kilo de tomates et y le prix initial en DH d'un kilo de pêches.

D'après les données de l'exercice, on a :

$$3x+4y=62 \quad \text{et} \quad 3\left(1+\frac{25}{100}\right)x+4\left(1-\frac{20}{100}\right)y=57{,}70$$

Ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x+4y=62 \\ 75x+64y=1150 \end{cases}$$

Et qui a pour solution : $x=6$ et $y=11$

La bonne réponse est alors B.

13

Notons p le prix d'un produit. Deux augmentations successives de 10% du p donnent un nouveau prix

Qui est égale à :

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 p=\frac{121}{100}p=\left(1+\frac{21}{100}\right)p$$

Il s'agit alors d'une augmentation de 21%. La bonne réponse est alors C.

14

Pour une même forme, un périmètre plus grand indique une aire plus grande, mais si on n'a pas de renseignement sur la forme, le périmètre peut être plus grand avec une aire plus petite.

Si on considère maintenant un rectangle de $10^{-10}\,m$ de largeur et de $10^{6}\,m$ de longueur, alors l'aire valle $10^{-4}\,m^2$ (très petite), alors que son périmètre est très grand.

La bonne réponse est alors C.

15

Appelons t le temps, en heures, du trajet quand on arrive à 13 heures.

Alors le temps mis quand on arrive à 11 heures est seulement $(t-2)$. Dans tous les cas, la distance parcourue est la même donc les produits « vitesse × temps » sont égaux : $10t=15(t-2)\Rightarrow t=6h$

La distance parcourue est donc : $10\times 6=60\ km$

Si on veut arriver à midi, le temps mis ne sera que $6h-1h=5h$, ceci pour faire $60\ km$, donc la vitesse nécessaire sera : $\dfrac{60\ km}{5h}=12\,km/h$

La bonne réponse est alors D.

16

En une heure, les deux cyclistes se rapprochent de $18km+22km=40km$. Pour se rapprocher de $54km$, il leur faut un temps de : $\dfrac{54}{40}h=1{,}35h=81mn$. La bonne réponse est alors B.

17

Notons V le volume du bassin. En une heure, on verse l'équivalent de $\frac{V}{9}$ et on en vide $\frac{V}{15}$. Il reste alors :

$$\frac{V}{9}-\frac{V}{15}=\frac{2V}{45}$$

Pour remplir le bassin il faut donc l'inverse soit : $\frac{45}{2}h = 22h30mn$

La bonne réponse est alors C.

18

1)- C'est vrai. En effet, soit q une valeur donnée. Effectuer deux remises successives de 7%, puis de 20%, c'est multiplier par : $\left(1-\frac{7}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{7}{100}\right)$

2)- C'est faux. Soit q une valeur donnée. Une augmentation de 12% suivi d'une baisse de 12% c'est multiplier par : $\left(1-\frac{12}{100}\right)\left(1+\frac{12}{100}\right)\neq 1$

19

Horizontalement : Les deux premières lettres de chaque groupe viennent en ordre alphabétique avec un écart de +1 (R S T, M N O,...etc.). Les solutions possibles sont : A), B), C).

Verticalement : la somme de la valeur des lettres (selon leur position A = 1 ,...,etc.) est toujours égale à 10.
($GAB = 7+1+2=10$, $FBB=6+2+2=10$, $AHA=1+8+1=10$, $ECB=5+3+2=10$).

La solution possible est donc B) et D) car ($BDD=2+4+4=10$) et D) ($AFC=1+6+3=10$).

La bonne réponse est alors B.

20

Horizontalement : les lettres de chaque groupe se suivent avec 3 lettres d'écart à chaque fois (LMNOPQR - EFGHIJK -... etc.). Les solutions possibles sont donc : B), C), E).

Verticalement : dans chaque groupe, une voyelle est toujours suivi d'une lettre qui la suit de 3 places dans l'alphabet. OPQR,IJKL, ...etc. Les solutions possibles sont donc : B), D).

La bonne réponse est alors B.

21

Horizontalement : Les premières lettres de chaque groupe avancent dans l'alphabet (B – C – D...). Les secondes lettres avancent dans l'alphabet sautant une lettre à chaque fois (R ST U V...). Les troisièmes lettres avancent dans l'alphabet sautant deux lettres à chaque fois (U V W X Y Z A ...). La seule solution possible est D

Verticalement : L'alphabet s'inscrit en diagonale 1re lettre 1er groupe – 2e lettre deuxième groupe, 3ème lettre, troisième groupe, 1re lettre quatrième groupe,... etc. Chaque lettre suit donc celle juste au-dessus à gauche.

La seule solution possible est donc D.

La bonne réponse est alors D.

22

1)- Le pourcentage global d'évolution du bénéfice entre 2009 et 2011 est égale :

$$\left(\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1+\frac{15}{100}\right)-1\right)\times 100\% = 3{,}5\%$$

Il s'agit alors d'une augmentation de $3{,}5\%$.

2)- Soit p % le pourcentage moyen annuel d'évolution du bénéfice. On a alors :

$$\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1+\frac{15}{100}\right)=\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

On en déduit alors que : $$\frac{207}{200}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

En définitive, on trouve : $$p = 1{,}7\%$$

23

Puisque M_1 remplit x bouteilles par minutes alors M_2 remplit $\frac{x}{7}$ bouteilles par minutes. Par suite, Les deux machines embouteillent en 3 heures :

$$180\left(x+\frac{x}{7}\right)=180\times\frac{8x}{7}=\frac{1440x}{7}$$

Donc la bonne réponse est alors C.

24

Soit x le prix d'achat de l'un des livres. D'après l'énoncé de la question :

$$\left(1-\frac{25}{100}\right)x+\left(1-\frac{40}{100}\right)x = 675$$

Ce qui donne $\frac{135x}{100}=675$ et donc $x = 500DH$. La bonne réponse est alors B.

25

Le pourcentage de mercure dans la solution Z est donné par :

$$\frac{25\%\times 12+10\%\times 13}{25}=17\%$$

La bonne réponse est alors A.

26

Soit b_1 le bénéfice moyen réalisé par la vente de chaque voiture en janvier 2003 et b_2 celle réalisé en 2004.

Notons encore n_1 le nombre de voitures vendues en 2003 et n_2 le nombre de voitures vendues en 2004.

Le bénéfice net résultant des ventes de voitures en 2003 est $n_1 b_1$ et en 2004 c'est $n_2 b_2$.

Selon les données de la question, on aura la chose suivante :

$$n_2b_2=\left(1+\frac{10}{100}\right)n_1b_1 \quad \text{et} \quad n_2=\left(1-\frac{10}{100}\right)n_1$$

Donc : $$n_2b_2=\frac{110}{100}n_1b_1 \quad \text{et} \quad n_2=\frac{90}{100}n_1$$

Et alors : $$b_2=\frac{11}{9}b_1 \text{ et } b_2\approx 1,22b_1$$

Il y a augmentation de 22% du bénéfice.

27

On peut répondre à la question par deux façons différentes.

1ère façon :

Le nouveau salaire brut étant $6575DH$. L'ancien salaire est (en DH) :

$$\frac{6575}{1+\frac{16}{100}}$$

Approximativement, on trouve : $5668,11DH$.

Il y a une augmentation de : $6575DH-5668,11DH=906,89DH$

Puisque les retenus représentent 18% du Salaire brut alors l'augmentation du salaire net en DH est :

$$906,89-906,89\times\frac{18}{100}=743,65$$

2ème façon :

Notons B_1 l'ancien salaire brut, B_2 le nouveau salaire brut, N le salaire net et Pr les prélèvements.

On sait que : $B_2=6575DH$, $B_1=N+\mathrm{Pr}$ et $B_2=\left(1+\frac{16}{100}\right)B_1$

Par conséquent : $B_1=5668,11DH$

L'augmentation approximative du salaire net devient :

$$\begin{aligned}0,16N&=0,16\left(B_1-\mathrm{Pr}\right)\\&=0,16\left(B_1-\frac{18}{100}B_1\right)\\&=743,66DH\end{aligned}$$

28

En lisant bien l'exercice, on peut déduire que :

- Les livres français sont en rouge, mais des livres étrangers peuvent l'être aussi.
- Les livres étrangers peuvent être rouges, les livres français peuvent avoir plus de 200 pages : les deux peuvent avoir un index.
- 200 pages pour avoir un index

- Tous les livres de 200 pages n'ont pas nécessairement d'index.

La bonne réponse est alors C.

29

Pour la série 1, voyons bien qu'on suit la règle : $-1 \rightarrow +2 \rightarrow -3$

$$7\,(-1)\;6\;(+2)\;8\;(-3)\;5\;(+4)\;9\;(-5)\;4\;(+6)\;10$$

La bonne réponse est alors A.

Pour la série 2, on suit la règle : $+5 \rightarrow +0 \rightarrow +2$

La bonne réponse est alors B.

Pour la série 3, on suit la règle : $\div 2 \rightarrow +8$

La bonne réponse est alors D.

Pour la série 4, on suit la règle : $+6 \rightarrow +5 \rightarrow +4 \rightarrow ....$

La bonne réponse est alors D.

30

Pour la série 1, On a la règle : (1res lettres de chaque paire $+3$, 2e lettre -3) :

A (BC) D (EF) G (HI) J (KL) M (NO) P(QR) S Z (YX) W (VU) T (SR) Q (PO) N (ML) K (JI) H

La bonne réponse est alors B.

Pour la série 2, On a la règle : (lettres et chiffres en sens alternés) :

$$JK(\rightarrow)-21\;(\rightarrow)-ML(\rightarrow)-34(\rightarrow)-NO(\rightarrow)-65(\rightarrow)-QP$$

La bonne réponse est alors D.

31

Pour la série 1, on suit la règle : $+3 \rightarrow \times 2 \rightarrow -4$

La bonne réponse est alors B.

Pour la série 2, on suit la règle : $+3 \rightarrow \times 2 \rightarrow -4$

Il s'agit d'heures et on ajoute 1h43 min à chaque fois. On trouve alors :

$$9.42(+1h\;43)11.25(+1h\;43)13.08(+1h\;43)14.51\;(+1h\;43)16h\;34$$

La bonne réponse est alors C.

Pour la série 3, on suit la règle : $\div 3 \rightarrow +9$

La bonne réponse est alors D.

Pour la série 4, on suit la règle : *Enlever au cube* -1

La bonne réponse est alors D.

32

Soit S_1, S_2 et S_3 les montants respectifs de la 1ère facture, la 2ème facture et la 3ème facture. La somme totale est donc $S = S_1 + S_2 + S_3$. D'après les données de l'exercice, on a :

$S_1 = \frac{3}{7}S$, $S_2 = \frac{3}{4}\times(S - S_1) = \frac{3}{7}S$, $S_3 = S - S_1 - S_2 = \frac{1}{7}S$

De plus $\frac{10}{100}S_3 = 250\,DH$, et donc $\frac{10}{100}\times\frac{1}{7}S = 250\,DH$. Parc conséquent : $S = 17500DH$

La bonne réponse est alors A.

33

Pour la figure 1 : Le nombre au centre est le plus grand diviseur commun des trois nombres autour.

La bonne réponse est alors 3.

Pour la figure2 : Le nombre au centre est égale à la somme des nombres autour, puis inversion des deux chiffres. $4+3+8+1=16\ldots\ 61$. Donc la bonne réponse est 1.

34

Horizontalement : deux voyelles par groupe. Donc les solutions possibles sont : A),C),D).

Verticalement : deux lettres qui se suivent. Donc les solutions possibles : C), D).

La bonne réponse est alors D.

35

Horizontalement : dans chaque groupe, on a la règle suivante :

$$Le\ 2^{ème}chiffre = 1^{er}chiffre + 3 \quad \text{et} \quad Le\ 3^{ème}chiffre = 2^{ème}chiffre + 1$$

Les solutions possibles : A), C) et D).

Verticalement : On remarque que le troisième chiffre de chaque groupe est le double du premier.

Les solutions possibles sont : C) ou D)

La bonne réponse est alors C.

36

Horizontalement : Les nombres sont divisibles par 4. Les solutions possibles sont: A) et C)

Verticalement : dans chaque groupe, le premier chiffre est égale à la somme des deux suivants. Les solutions possibles sont : B), C) et D).

La bonne réponse est alors C.

37

Que ce soit horizontalement ou verticalement, la case du milieu représente la superposition des deux cases de chaque côté. La bonne réponse est alors La figure 3.

38

Pour la figure 1 : horizontalement et verticalement, la troisième case est égale à la somme des deux premières. On a encore horizontalement et verticalement, la quatrième case est égale à la différence des deux premières.

Les deux nombres manquants sont : $14\ -\ 4$

Pour la figure 2 : uniquement horizontalement, la somme des deux premières case est égale au produit des deux suivantes : $21+27=6\times8$, $6+8=7\times2$

Les deux nombres manquants sont : $8\ -\ 2$

Pour la figure 3 : Dans chaque rangée, le produit des deux premiers nombres est égale la somme des deux suivants : $6\times3=15+3$, $5\times3=7+8$

39

Pour la figure 1 : horizontalement comme verticalement, la somme des deux premières cases est égale à la deux suivantes : $5+2=6+1$

Les deux nombres manquants sont : $6-1$

Pour la figure 2 : Le produit des nombres dans chaque section vaut 64.

La bonne réponse est alors 2.

Pour la figure 3 : La somme des nombres du triangle dans lequel s'inscrit le nombre en question :

$$3+9+5=17$$

La bonne réponse est alors 17.

40

1)- La baisse est de $400DH$, soit un pourcentage du prix initial égal à :

$$\frac{400}{2000}\times100=20\%$$

2)- En 2003, le prix du téléviseur était de $1600\times0,8=1280DH$.

3)- 30% du prix initial représentent $2000\times\frac{30}{100}=600DH$.

On utilise la calculatrice pour connaître les valeurs de n à partir desquelles : $2000\times(0,8)^n\leq600$

On obtient donc $n\geq6$.

CALCUL ALGEBRIQUE

Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(A) $(5x+3)(2x+1)-(2-x)(1-5x)-3(1-x)=5x^2+18x-2$

(B) $\dfrac{(x-2)^2}{3}+\dfrac{(x-5)(x+4)}{2}=\dfrac{(5x+4)(x-3)}{6}-\dfrac{20}{3}$

(C) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ alors : $\dfrac{\dfrac{x^2-x-2}{x-1}}{x-2}=\dfrac{x+1}{x-1}$

(D) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ alors : $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-2}=-\dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$

01

Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Soit $x \in \mathbb{R}-\{0,-1,1\}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3} \quad ; \quad \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1+x}{x}} \quad ; \quad \frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

2)- $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

$$a^4-4a^2b^2+4b^4 \quad ; \quad 8a^3-125b^3 \quad ; \quad a^2+2a^4-b^2-2b^4 \quad ; \quad a^{2n}-1 \quad ; \quad a^{2n+1}+1$$

3)- Simplifier : $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)$



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut calculer $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $T_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$

1)- Calculer $Z_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}$, en distinguant deux cas suivant les valeurs de θ.

2)- En déduire l'expression de S_n et T_n sous forme de produit et quotient de sinus et cosinus.

3)- a)-Sans nouveau calcul, donner l'expression de $\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$ sous forme de sinus et cosinus.

b)-En déduire la valeur de $B_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$



Examen type HEM

Vrai ou Faux ?

1)- soit x un réel différent de 1. Le nombre $\dfrac{1-x^2}{(x-1)^4}$ est égal à :

(A) $\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$; (B) $-\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$; (C) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$

2)- La somme $2+2^2+\ldots+2^n$ est égale à :

(A) $2^{n+1}-2$; (B) $2-2^{n+1}$; (C) 2^n-2



Du Bac Aux Classes Prépas

Exercice d'entraînement

1)- Simplifier les expressions suivantes :

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}} \quad ; \quad \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

2)- Soit $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.



Extrait concours ENSAM

Exercice d'entraînement

1)- Simplifier la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$, en utilisant l'égalité : $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)}=\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}$

2)- Simplifier le produit $P_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, pour un entier $n\geq 2$

3)- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.

4)- Démontrer que : $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^{+3}$ / $a^2-c^2=b$ on a $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$

5)- Prouver que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ est rationnel



Du Bac Aux Classes Prépas

Exercice d'entraînement

1)- Montrer que le réel $A=\dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ est un entier et le calculer.

2)- $(a,x)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$S_n=1-2x+4x^2+\ldots+(-1)^n 2^n x^n \quad ; \quad A_n=\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{ka}{n}}$$



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Résoudre les systèmes suivants : ($a > 0$)

$$\begin{cases} e^x . e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

2)- a)- Montrer que l'équation $(E) : x^3 - 3x - 1 = 0$ admet trois racines réelles distinctes dans $[-2,2]$.

b)- Posons $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in [0,\pi]$. Montrer que $\cos(3\alpha) = \frac{1}{2}$.

c)- En déduire les solutions de (E).

08

Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1$

09



Choisir la bonne réponse

Un nénuphare, dont la surface double tous les jours, met 100 jours pour couvrir la surface d'un étang. Combien de temps mettront deux nénuphares pour couvrir cet étang ?

(A) 100 jours (B) 50 jours (C) 99 jours (D) 75 jours

10

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Sur une route longue de $30km$, deux cyclistes, roulant l'un et l'autre à 15 kilomètres à l'heure, partent à la rencontre l'un de l'autre. Une mouche qui vole à 30 kilomètres à l'heure va, sans arrêt, du nez de l'un au nez de l'autre. Qu'elle distance aura-t-elle parcourue lorsque les cyclistes se rejoindront ?

(A) $30km$ (B) $15km$ (C) $22,5km$ (D) $60km$

11

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

A marée basse, une échelle de coupée, fixée par son sommet au flanc d'un navire, a douze échelons hors de l'eau. Ces échelons sont à $25cm$ les uns des autres, et la mer monte de $75cm$ par heure.
Combien restera-t-il d'échelons hors de l'eau après une heure et demie de marée montante ?

(A) *Neuf* (B) *Trois* (C) *Douze* (D) *Huit*

12

C1

A	B	C	D
F	V	F	V

Pour la justification des résultats, il suffit de faire des calculs simples dans $\mathbb{R}$.

Juste une remarque, on peut tester la validité d'une égalité si elle vraie ou fausse en donnant quelques valeurs pour x . Si l'égalité n'est pas vraie pour une valeur de x bien choisie, alors elle est fausse.

C2

1)- Soit $x \in \mathbb{R} - \{0,-1,1\}$. Simplifions les expressions suivantes :

$$\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{2(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1-x^2)(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{2x^2-x-1}{(1-x^2)(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{(1-x)(-1-2x)}{(1-x^2)(1+x+x^2)}$$

$$= -\frac{1+2x}{(1+x)(1+x+x^2)}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = -\frac{1+2x}{(1+x)(1+x+x^2)}}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x-(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$$

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x(x+2)-(x-1)(x+2)-(x-1)}{x(x^2-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+2x-x^2-x+2-x+1}{x(x^2-1)(x+2)}$$

Donc : $$\boxed{\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{3}{x(x^2-1)(x+2)}}$$

2)- $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Factorisons les expressions suivantes :

$$a^4-4a^2b^2+4b^4=\left(a^2-2b^2\right)^2 \quad ; \quad 8a^3-125b^3=(2a)^3-(5b)^3=(2a-5b)\left(4a^2+10ab+25b^2\right)$$

$$a^{2n}-1=(a-1)\left(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\ldots+a+1\right) \; ; \; a^{2n+1}+1=(a+1)\left(a^{2n}-a^{2n-1}+a^{2n-2}-\ldots+a^2-a+1\right)$$

$$\begin{aligned} a^2+2a^4-b^2-2b^4 &=\left(a^2-b^2\right)+2\left(a^4-b^4\right)\\ &=\left(a^2-b^2\right)+2\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)\\ &=\left(a^2-b^2\right)\left(1+2a^2+2b^2\right)\end{aligned}$$

3)- Simplifions l'expression suivante :

$$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{4+2\sqrt{3}}.\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}.\left(\sqrt{3}-1\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=2$$

03

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de calculer $T_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$

1)- Calculons $Z_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}$:

- Si $\theta=2p\pi$ avec $p\in\mathbb{Z}$, alors $e^{ik\theta}=\left(e^{2i\pi k}\right)^p=1$ et dans ce cas : $Z_n=n+1$
- Si $\theta\neq 2p\pi$ avec $p\in\mathbb{Z}$, alors :

$$Z_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k=\frac{e^{i(n+1)}-1}{e^{i\theta}-1}=\frac{2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{n\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

2)- On a $S_n=\mathrm{Re}(Z_n)$ et $T_n=\mathrm{Im}(Z_n)$, donc :

$$S_n=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad T_n=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

3)- a)- Si $\theta=p\pi$ avec $p\in\mathbb{Z}$, alors : $\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$

-Si $\theta\neq p\pi$ avec $p\in\mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)=S_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\cos(n\theta)$

b)- On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$, donc :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(2\theta)+1\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) + \frac{n+1}{2}$$

Et par conséquent :

- Si $\theta = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, alors $B_n = n+1$
- Si $\theta \neq p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, alors $B_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{2\sin\theta}\cos(n\theta) + \dfrac{n+1}{2}$

04

1)- Soit x un réel différent de 1. Le nombre $\dfrac{1-x^2}{(x-1)^4}$ est égal à : (B) $-\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$

2)- La somme $2+2^2+\ldots+2^n$ est égale à : (A) $2^{n+1}-2$

05

1)- Simplifions les expressions suivantes :

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} = \left|\sqrt{5}-1\right| - \left|\sqrt{5}+1\right| = -2$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) &= \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2-3\right)\\ &= \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{10}\right)\\ &= 10\sqrt{2}-4\sqrt{2}-4\sqrt{5}+4\sqrt{5}\\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

2)- Soit $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrons par l'absurde que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

Pour cela, posons $\sqrt{x}+\sqrt{y} = q$ avec $q \in \mathbb{Q}$. On va distinguer deux cas :

- Si $x = y$ alors $\sqrt{x} = \dfrac{q}{2}$, contradiction avec le fait que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

- Si $x \neq y$ alors $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = q$, c'est-à-dire $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \dfrac{x-y}{q}$.

$\sqrt{x}+\sqrt{y} = q$ et $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \dfrac{x-y}{q}$ entraîne $\sqrt{x} = \dfrac{q}{2}+\dfrac{x-y}{2q}$, ce qui est contradictoire à $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.

Conclusion : $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

06

1)- D'après l'égalité $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{k+3}$, valable pour $k \in \mathbb{N}$, on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}$$

Donc :
$$\boxed{S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}}$$

2)- Simplifions le produit $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, pour un entier $n\in\mathbb{N}^*$:

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$
$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right).\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\frac{n+1}{2n}$$

Donc :
$$\boxed{P_n=\frac{n+1}{2n}}$$

3)- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.

On a d'après la formule du Binôme :

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k\left(1+(-1)^k\right)$$
$$=2\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}C_n^{2p}2^{n-2p}\left(\sqrt{3}\right)^{2p}$$
$$=2\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}C_n^{2p}2^{n-2p}.3^p$$

Donc : $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.

4)-Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^{+3}$ tel que $a^2 - c^2 = b$.

Démontrons que $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

On a $\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)^2 = \frac{a+c}{2} + \sqrt{a^2-c^2} + \frac{a-c}{2} = a+\sqrt{b}$. Puisque $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}} \geq 0$, alors :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

5)- Prouvons que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ est rationnel. Posons : $X = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

On a :

$$X^3 = \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$$
$$= 40 + 6X$$

Donc : $X^3 - 6X - 40 = 0$

Et par suite $(X-4)(X^2+4X+10) = 0$

Cette équation n'a qu'une seule solution qui est $X = 4$. En définitive :

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$$

07

1)- Montrons que le réel A est un entier :

En suivant la même démarche de la question 5 de l'exercice précédent, on obtient : $A^3 = 7A + 36$

Cette égalité est équivalente à $(A-4)(A^2+4A+9) = 0$. Donc : $A = 4$

2)- $(a,x) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifions les expressions suivantes :

On a : $S_n = 1 - 2x + 4x^2 + \ldots + (-1)^n 2^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-2x)^k$. On distingue alors deux cas :

- Si $x \neq -\frac{1}{2}$ alors $S_n = \frac{1-(-2x)^{n+1}}{1+2x}$.
- Si $x = -\frac{1}{2}$ alors $S_n = n+1$

On a : $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ka}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{a}{n}}\right)^k$. On distingue alors deux cas :

- Si $a \neq 0$ alors $A_n = \frac{1-e^a}{1-e^{\frac{a}{n}}}$.
- Si $a = 0$ alors $A_n = n$

1)- Résolvons les systèmes suivants : $(a>0)$

$$\begin{cases} e^x.e^{2y}=a \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(e^x.e^{2y}\right)=\ln a \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=\ln a \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x\ln a+1=0 \\ y=\dfrac{1}{2x} \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation $x^2-x\ln a+1=0$ vaut : $\Delta=(\ln a)^2-4$

D'où la discussion suivante :

- Si $a\in\left]\dfrac{1}{e^2},e^2\right[$ alors $\Delta<0$ et dans ce cas, le système n'a pas de solutions.
- Si $a\in\left]0,\dfrac{1}{e^2}\right[\cup\left]e^2,+\infty\right[$ alors $\Delta>0$ et dans ce cas :

$$x=\frac{\ln a-\sqrt{(\ln a)^2-4}}{2} \text{ et } y=\frac{\ln a+\sqrt{(\ln a)^2-4}}{4}$$

Ou

$$x=\frac{\ln a+\sqrt{(\ln a)^2-4}}{2} \text{ et } y=\frac{\ln a-\sqrt{(\ln a)^2-4}}{4}$$

L'ensemble des solutions est donné par :

$$S=\left\{\left(\frac{\ln a-\sqrt{(\ln a)^2-4}}{2},\frac{\ln a+\sqrt{(\ln a)^2-4}}{4}\right);\left(\frac{\ln a+\sqrt{(\ln a)^2-4}}{2},\frac{\ln a-\sqrt{(\ln a)^2-4}}{4}\right)\right\}$$

- Si $a=e^2$ alors $\Delta=0$ et dans ce cas : $S=\left\{\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$
- Si $a=e^{-2}$ alors $\Delta=0$ et dans ce cas : $S=\left\{\left(1,\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

$$\begin{cases} 2\log_x y+2\log_y x=-5 \\ xy=e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{\ln y}{\ln x}+2\dfrac{\ln x}{\ln y}=-5 \\ \ln x+\ln y=1 \end{cases}$$

Posons $t=\dfrac{\ln x}{\ln y}$. On a alors $2t^2+5t+2=0$ et qui donne $t=-2$ ou $t=-\dfrac{1}{2}$

- Si $t=-2$ alors $\ln x=-2\ln y$ et $\ln x+\ln y=1$ ce qui donne $\ln x=2$ et $\ln y=-1$, et par suite $(x,y)=\left(e^2,e^{-1}\right)$
- Si $t=-\dfrac{1}{2}$ alors $\ln y=-2\ln x$ et $\ln x+\ln y=1$ ce qui donne $\ln y=2$ et $\ln x=-1$, et par suite $(x,y)=\left(e^{-1},e^2\right)$

En définitive, l'ensemble des solutions de ce système est : $S=\left\{\left(\frac{1}{e},e^2\right);\left(e^2,\frac{1}{e}\right)\right\}$

2)- a)- Considérons la fonction f définie sur $[-2,2]$ par : $f(x)=x^3-3x-1$

La fonction f est dérivable sur $[-2,2]$ et de dérivée : $f'(x)=3x^2-3$

Son tableau de variations sur $[-2,2]$ est :

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-3	↗	1

On en déduit de ce tableau que la fonction f s'annule trois fois sur l'intervalle $[-2,2]$, ceci car :

$0\in f([-2,-1])$, $0\in f([-1,1])$ et $0\in f([1,2])$

Par conséquent, l'équation $(E): x^3-3x-1=0$ admet trois racines réelles distinctes dans $[-2,2]$.

b)- Posons $x=2\cos\alpha$ avec $\alpha\in[0,\pi]$. Montrer que $\cos(3\alpha)=\frac{1}{2}$.

On a d'après les formules de transformation trigonométriques :

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha)&=\cos(\alpha+2\alpha)\\&=\cos\alpha\cos(2\alpha)-\sin\alpha\sin(2\alpha)\\&=\cos\alpha\left(2\cos^2(\alpha)-1\right)-2\sin^2\alpha\cos\alpha\\&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\\&=\frac{1}{2}\left(x^3-3x\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent : $\cos(3\alpha)=\frac{1}{2}$

c)- Déduisons les solutions de (E) :

On a : $\cos(3\alpha)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(3\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 3\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } 3\alpha=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Par suite : $\alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

Le fait que $\alpha \in [0, \pi]$ donne : $\alpha = \frac{\pi}{9}$ ou $\alpha = \frac{7\pi}{9}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{9}$

En définitive, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par :

$$S = \left\{2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{5\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}\right\}$$

09

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1$

On a pour tout réel $x > 0$:

$$\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\pi \ln x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi \ln x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \pi \ln x = 2k\pi \;\; ou \;\; \pi \ln x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 2k \;\; ou \;\; \ln x = \frac{1}{2} + 2k \;, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{2k} \;\; ou \;\; x = e^{\frac{1}{2}+2k} \;, \; k \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation donnée est :

$$S = \left\{e^{k} \;/ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{e^{\frac{1}{2}+2k} \;/ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

10

Deux nénuphares mettront 99 jours pour couvrir cet étang. En effet, en doublant de surface tous les jours et couvrant l'étang en 100 jours, un nénuphare en couvre la moitié en 99 jours. C'est donc le temps que mettent deux nénuphares pour couvrir tout l'étang. La bonne réponse est alors (C).

11

La mouche aura parcouru $30Km$ lorsque les cyclistes se rejoindront. En effet, les cyclistes roulent une heure avant de se rencontrer, ayant alors parcouru $15Km$ chacun. La mouche, qui vole à $30Km$ à l'heure, parcourt donc pendant ce temps une distance de $30Km$. La bonne réponse est alors (A).

12

Le bateau monte avec la marée, et donc l'échelle aussi, laissant ainsi toujours le même nombre d'échelons hors de l'eau. La bonne réponse est alors (C).

GENERALITES

SUR LES SUITES

Exemple Concours TAFEM Choisir la bonne réponse

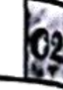
1)- Compléter la suite logique (construite à partir d'opération algébriques)

$$4 \quad - \quad 12 \quad - \quad 8 \quad - \quad 10 \quad - \quad 9 \quad - \quad .....$$

(A) 19 (B) 8 (C) 13,25 (D) 9,5

2)- Les nombres manquants à la série suivante : 4 ; 11 ; 25 ; 53 ; 109 ; ? ; ?

(A) 205 ; 411 (B) 221 ; 445 (C) 259 ; 531 (D) 162 ; 271



Extrait concours ENSA Vrai ou Faux ?

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$

(A) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{n}{(n-1)!}$

(B) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on a $n \geq 2$, alors on aura : $0 \leq u_n \leq 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

(D) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et de limite nulle.



Extrait concours ENSA Vrai ou Faux ?

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2\sqrt{3}}$

(A) La suite (u_n) est croissante.

(B) La suite (u_n) est majorée

(C) Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = \sqrt{3}$

(D) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \geq \sqrt{k}$



Extrait concours ENSAM Exercice d'entraînement

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$

Extrait concours ENSA Vrai ou Faux ?

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

(A) La suite (u_n) n'est pas bornée.

(B) La suite (u_n) est convergente.

(C) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la suite (u_n) est croissante.

(D) Il existe un réel $a \in \mathbb{R}^*$ pour lequel la suite (u_n) est constante



Extrait concours ISCAE Exercice d'entraînement

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$

1)- Déterminer deux entiers a et b de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{a}{(n+1)^2} + \frac{b}{(n+2)^2}$$

2)- En déduire la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n, puis calculer $\lim S_n$.



Du Bac Aux Classes Prépas Exercice d'entraînement

On considère les suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

1)- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

2)- En déduire, pour tout $n \geq 1$: $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$

3)- Calculer v_n en fonction de n puis en déduire $\lim u_n$.



Extrait concours ISPM Vrai ou Faux ?

(A) La suite $\left(n^2 - 2(-1)^n\right)$ est croissante à partir d'un certain rang.

(B) La suite $\left(n^2 - (-2)^n\right)$ est croissante à partir d'un certain rang.

(C) La suite $\left(n + (-1)^n\right)$ est croissante à partir d'un certain rang.

(D) La suite $\left(2n + (-1)^n\right)$ est croissante à partir d'un certain rang.

(E) La suite $\left(3n - 2(-1)^n\right)$ est croissante à partir d'un certain rang.



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Utiliser le développement de $(1+x)^2, (1+x)^3, (1+x)^4, (1+x)^5$ en y remplaçant successivement x par $1, 2, \ldots, n$ pour calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \quad , \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad , \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 \quad , \quad S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4$$



Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Compléter la suite logique :

OPB

JKF

DEW

DEZ

TCD AGH ? UKL HWX

(A) ANO (B) MNO (C) AIO (D) CDK

10

Exemple Concours TAFEM — Choisir la bonne réponse

Compléter la suite logique (construite à partir d'opérations algébriques)

255

105 84 ? 63 147

93

497

366

(A) 105 (B) 42 (C) 46 (D) 126



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation : $x + \ln x = n$

1)- Montrer que cette équation admet une solution unique x_n dans $]0,+\infty[$

2)- Montrer que la suite (x_n) est croissante non majorée. Quelle est sa limite ?



01

1)- Complétons la suite logique :

4 – 12 – 8 – 10 – 9 – 9,5

Remarquons que : $(4+12)\div 2=8$; $(12+8)\div 2=10$; $(8+10)\div 2=9$; $(10+9)\div 2=9,5$

Donc la bonne réponse est : (D)

2) - Les nombres manquants à la série : $4\,;11\,;25\,;53\,;109\,;221\,;445$

Remarquons que les éléments de cette série sont les termes de la suite : $u_0=4$ et $u_{n+1}=2u_n+3$

Où $n\in\mathbb{N}$. Donc la bonne réponse est : (B)

02

A	B	C	D
V	F	V	V

La proposition (A) est vraie, il suffit de faire une démonstration par récurrence pour la vérification.

La proposition (B) est fausse. Contre-exemple : $u_1=1$ et $u_2=2$ et $u_1<u_2$

La proposition (C) est vraie, il suffit de faire une démonstration par récurrence. En effet :

Pour $n=2$, c'est vraie. Supposons que $0\le u_n\le 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ et montrons que $0\le u_{n+1}\le 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

On a : $u_{n+1}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)u_n$ et $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, donc : $u_{n+1}\le\frac{3}{4}u_n$ et $0\le u_{n+1}\le 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

La proposition (D) est vraie, il suffit d'utiliser le fait que $0\le u_n\le 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ est $\left|\frac{3}{4}\right|<1$

03

A	B	C	D
V	V	F	V

La proposition (A) est vraie, il suffit de voir que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{\left(u_n-\sqrt{3}\right)^2}{2\sqrt{3}}$

La proposition (B) est vraie, il suffit de montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\le\sqrt{3}$

La proposition (C) est fausse, il suffit de montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\ne\sqrt{3}$

Pour $n=0$, on a $u_0\ne\sqrt{3}$. Supposons que $u_n\ne\sqrt{3}$ et montrons que $u_{n+1}\ne\sqrt{3}$.

$u_n\ne\sqrt{3}$ entraîne $u_n^2\ne 3$ et donc $\frac{u_n^2+3}{2\sqrt{3}}\ne\sqrt{3}$.

La proposition (D) est vraie, il suffit de prendre $k=0$

04

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$

Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \leq v_0$

Supposons que $u_n \leq v_n$ et montrons que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.

On a : $$v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}}\right) = \sqrt{u_{n+1}}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{\frac{u_n + v_n}{2}}\right)$$

Or $u_n \leq v_n$ nous donne $2v_n \geq u_n + v_n$ et donc $v_n \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et alors $\sqrt{v_n} - \sqrt{\dfrac{u_n + v_n}{2}} \geq 0$

Par conséquent $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$

05

A	B	C	D
V	F	F	F

La proposition (A) est vraie. Par l'absurde, si (u_n) était bornée alors elle serait « la monotonie de (u_n) entraîne la convergence de (u_n) ». Si on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ et donc $\dfrac{1}{\ell} = 0$. Impossible

On ce qui concerne la monotonie de (u_n), il suffit de voir que si $a > 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$. et si $a < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

La proposition (B) est fausse. Déjà vue en (A)

La proposition (C) est fausse. Déjà vue en (A)

La proposition (D) est fausse. Si (u_n) était constante, alors elle serait convergente.

On peut voir aussi que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \neq 0$.

06

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{2n+3}{(n+1)^2 (n+2)^2}$

1)- Détermination de a et b :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{a}{(n+1)^2} + \frac{b}{(n+2)^2} = \frac{a(n+2)^2 + b(n+1)^2}{(n+1)^2 (n+2)^2} = \frac{(a+b)n^2 + (4a+2b)n + 4a + b}{(n+1)^2 (n+2)^2}$$

Il suffit alors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+2b=2 \\ 4a+b=3 \end{cases}$$

Une résolution simple donne : $a=1$ et $b=-1$

2)-Déterminons la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n,

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+2)^2}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 - \frac{1}{(n+2)^2}$

Puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+2)^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$

07

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

1)- Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

Les fonctions f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et vérifient :

$$f'(x) = 1 - \cos x \quad \text{et} \quad g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad g''(x) = x - \sin x = f(x)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq f(0)$ et $f(x) \geq 0$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g''(x) \geq 0$ et donc $g'(x) \geq g'(0)$ et $g'(x) \geq 0$

Enfin : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) \geq g(0)$ et $g(x) \geq 0$

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

2)- Montrons que pour tout $n \geq 1$: $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$

D'après le résultat de la question 1) , on aura la chose suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$

Si $1 \leq k \leq n$ alors $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$ (Car : $-1 \leq -\frac{k^3}{n^3}$)

Par sommation, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{6n^3}\right)\le\sum_{k=1}^{k=n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\le\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2}$$

Et donc , pour tout $n\ge 1$: $\quad v_n-\frac{1}{6n^2}\le u_n\le v_n \quad (*)$

3)- Calculons v_n en fonction de n puis $\lim u_n$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$

Donc : $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*, v_n=\frac{n+1}{2n}$

On a $\lim v_n=\lim\left(v_n-\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{2}$, donc d'après $(*)$, on en déduit que $\lim u_n=\frac{1}{2}$

08

A	B	C	D	E
V	F	F	V	F

La proposition (A) est vraie. En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left((n+1)^2-2(-1)^{n+1}\right)-\left(n^2-2(-1)^n\right)=2n+1+4(-1)^n$$

Si $n\ge 2$ alors $2n+1+4(-1)^n\ge 2n-3\ge 1$. Ceci montre que La suite $\left(n^2-2(-1)^n\right)$ est croissante à partir d'un certain rang.

La proposition (B) est fausse. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left((n+1)^2-(-2)^{n+1}\right)-\left(n^2-(-2)^n\right)=2n+1+3\times(-2)^n$$

Pour les valeurs de n assez grandes, la quantité $2n+1+3\times(-2)^n$ n'est pas toujours positive.

La proposition (C) est fausse. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(n+1+(-1)^{n+1}\right)-\left(n+(-1)^n\right)=1-2\times(-1)^n$$

La quantité $1-2\times(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 3 . Ce qui signifie que $1-2\times(-1)^n$ n'est pas toujours positive.

La proposition (D) est vraie. En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(2n+2+(-1)^{n+1}\right)-\left(2n+(-1)^n\right)=2-2\times(-1)^n$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2-2\times(-1)^n\ge 0$. Ceci montre que La suite $\left(n^2-2(-1)^n\right)$ est croissante à partir d'un certain rang.

La proposition (E) est fausse. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(3n+3-2(-1)^{n+1}\right)-\left(3n-2(-1)^{n}\right)=3+4(-1)^{n}$$

La quantité $3+4(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 7 et -1. Ce qui signifie que $3+4(-1)^n$ n'est pas toujours positive.

C9

- Calcul de $S_1=\sum_{k=1}^{n} k$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(1+x)^2 = x^2+2x+1$

En particulier pour tout entier naturel k : $(1+k)^2 = k^2+2k+1$

Donc : $$\sum_{k=1}^{n}(1+k)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

C'est-à-dire : $$\sum_{k=1}^{n}(1+k)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+n$$

Enfin : $$2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=1+2^2+3^2+\ldots+n^2+2\sum_{k=1}^{n}k+n$$

Par simplification, on obtient : $$(n+1)^2-(1+n)=2\sum_{k=1}^{n}k$$

Ce qui donne : $$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

- Calcul de $S_2=\sum_{k=1}^{n} k^2$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(1+x)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

En particulier pour tout entier naturel k : $(1+k)^3 = k^3+3k^2+3k+1$

Donc : $$\sum_{k=1}^{n}(1+k)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

C'est-à-dire : $$\sum_{k=1}^{n}(1+k)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

Enfin : $$2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=1+2^3+3^3+\ldots+n^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

Par simplification, on obtient : $$(n+1)^3-1-\frac{3n(n+1)}{2}-n=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Ce qui donne : $$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En suivant la même méthode pour $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$ et $S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4$, on obtient :

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{et} \quad S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Dans l'ordre alphabétique, On peut voir que la ligne verticale contient deux lettres consécutives : 10
O et P - J et K - D et E. Par contre, la ligne horizontale se termine par deux lettres consécutives :
C et D - G et H - K et L – W et X. L'élément convenable pour compléter la suite logique est MNO.
La bonne réponse est alors (B)

Pour les nombres 255, 93, 497 et 366, on a : $25 = 5^2$, $9 = 3^2$, $49 = 7^2$ et $36 = 6^2$ 11
Tandis que pour les nombres 105, 84, 63, 147 : $10 = 2\times 5$, $8 = 2\times 4$, $6 = 2\times 3$ et $14 = 2\times 7$
L'élément convenable pour compléter la suite logique est 42. La bonne réponse est alors (B)

On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation : $x + \ln x = n$ 12

1)- Montrons que cette équation admet une solution unique x_n dans $]0,+\infty[$:

Pour cela, considérons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$

On vérifie facilement que la fonction f est continue, strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc il réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$. Comme $n \in \mathbb{R}$, il existe un unique x_n dans $]0,+\infty[$ tel que $f(x_n) = 0$. D'où le résultat.

2)-Montrons que la suite (x_n) est croissante non majorée : .

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$

Puisque f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors $f(x_n) \le f(x_{n+1})$ entraîne que $x_n \le x_{n+1}$. Par Conséquent, la suite (x_n) est croissante.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n + \ln(x_n) = n$

Par l'absurde, si la suite (x_n) était majorée, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \le M$

Cela entraîne pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + \ln(x_n) \le M + \ln M$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \le M + \ln M$.

Absurdité car la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. La suite (x_n) est croissante non majorée.

Remarque : Toute suite croissante non majorée converge vers $+\infty$.

LES SUITES

ARITHMETIQUES

ET GEOMETRIQUES

Extrait concours ENSA Vrai ou Faux ?

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \ , n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2^{n+1}} \ , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(A) (u_n) est une suite géométrique.

(B) (v_n) est une suite arithmétique.

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 + u_1 + ... + u_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

(D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \frac{n+1}{2^{n+1}}$

(E) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$



Extrait concours ENSA Vrai ou Faux ?

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles définies par :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

(A) Les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont toutes les deux croissantes

(B) $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$

(C) Les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ ne sont pas majorées

(D) $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$



Examen type HEM Vrai ou Faux ?

(A) $10 + 15 + 20 + ... + 95 + 100 = 1045$

(B) $3 + 9 + 27 + ... + 3^6 = 1089$

(C) Si $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ pour tout entier $n \geq 2$ alors $u_2 + u_3 + ... + u_n = \ln n$

(D) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} + 3$ alors $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = -\frac{1}{2^n} + 3n + 5$



Extrait Olympiades — Exercice d'entraînement

Calculer la somme :

$$S = 1+2+3-4-5+6+7+8-9-10+....-2010$$

Chaque trois consécutifs signes + sont suivis par deux signes –

03

Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -28$. Alors :

(A) $u_6 = 2$.

(B) Il existe un entier m tel que $u_m > m$.

(C) Il existe un, et un seul, entier n tel que $u_n u_{n+1} < 0$.

(D) Il existe un entier p tel que $u_p = 2007$.

(E) Il existe un entier k tel que $u_1 + u_k = 2007$.

05

Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et $v_n = e^{-u_n}$

(A) La suite (v_n) est géométrique.

(B) La suite (v_n) est convergente.

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$, alors $\lim S_n = \dfrac{1}{e-1}$

(D) La suite (w_n) définie par $w_n = \ln(v_n)$ est géométrique.

06

Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n = \frac{1}{3^{n^2+n}}$$

(A) On a : $v_3 = \dfrac{1}{3^{12}}$

(B) Pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 3^{-2} v_n$

(C) La suite (v_n) est géométrique.

(D) On a : $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_{10} = \dfrac{1}{110 \ln 3}$

07

Du Bac Aux Classes Prépas Vrai ou Faux ?

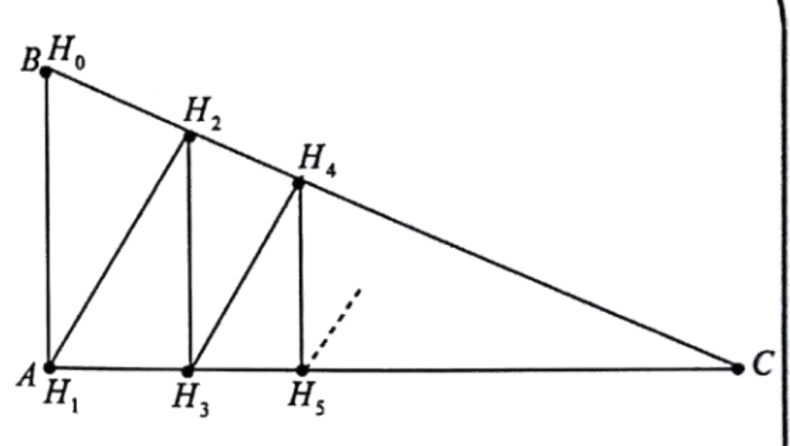
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $BC = 8$.

On considère la suite des points (H_n) ainsi :

$H_0 = B$ et H_{n+1} est le projeté Orthogonal de H_n sur (AC) si n est pair et sur (BC) si n est impair.

On définit les suites (ℓ_n) et (L_n) par :

$\ell_n = H_nH_{n+1}$ et $L_n = \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + ... + \ell_n$



(A) $\ell_1 = H_1H_2$

(B) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, H_{n+1} est le milieu du segment $[H_nH_{n+2}]$

(C) La suite (ℓ_n) est géométrique.

(D) Quand n tend vers $+\infty$, L_n tend vers un nombre fini inférieur à 30.



Du Bac Aux Classes Prépas Exercice d'entrainement

On considère la propriété $\mathcal{P}$: « il existe un réel k tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} = k u_{n+2}^2$ »

1)- Montrer que toute suite géométrique vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

2)- Trouver une suite (u_n) vérifiant $\mathcal{P}$ sans être géométrique.



Extrait concours ENSA Vrai ou Faux ?

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2}(u_n)^2$. On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On considère alors la suite (v_n) définie par : $v_n = \ln(\sqrt{2}u_n)$

(A) La suite (v_n) est géométrique .

(B) $v_{10} = -512 \times \ln 2$

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 2)(1 - 2^n)$

(D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 \times u_1 \times ... \times u_n = \frac{1}{2^{2^n}}$



Du Bac Aux Classes Prépas Exercice d'entrainement

Soit (u_n) une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k . u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$$

11

Du Bac Aux Classes Prépas Exercice d'entrainement

Soit (z_n) une suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation : $z_{n+1} = \dfrac{az_n + b}{cz_n + d}$, où $n \in \mathbb{N}$.

où a, b, c et d sont des complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. On suppose dans toute la suite que z_0 est choisi de sorte que la suite (z_n) soit bien définie.

1)- Montrer que l'équation $(E) : \dfrac{az+b}{cz+d} = z$ admet une ou deux solutions dans $\mathbb{C}$.

2)- On suppose que (E) admet deux solutions complexes α et β.

a)- Montrer que si $z_0 = \beta$ alors la suite (z_n) est constante.

b)- On suppose maintenant que $z_0 \neq \beta$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}$

Montrer que :

- ✓ w_n est bien définie sur $\mathbb{N}$.
- ✓ La suite (w_n) est géométrique.

3)- On suppose que (E) admet une unique solution β.

a)- Montrer que si $z_0 = \beta$ alors la suite (z_n) est constante.

b)- On suppose maintenant que $z_0 \neq \beta$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{z_n - \beta}$

Montrer que :

- ✓ v_n est bien définie sur $\mathbb{N}$.
- ✓ La suite (v_n) est arithmétique.

12

C1

A	B	C	D	E
V	F	F	F	V

La proposition (A) est vraie. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

La proposition (B) est fausse. En effet, la différence $v_{n+1} - v_n$ n'est pas constante.

La proposition (C) est fausse. On peut vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 + u_1 + ... + u_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

La proposition (D) est fausse. Il suffit de faire un test pour $n = 1$.

La proposition (E) est vraie. On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim v_n = 2$

C2

A	B	C	D
F	V	F	V

La proposition (A) est fausse. Pour tout $n \geq 1$:

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$$

$2n+1 > 2n$ et $2n+2 > 2n$ nous donne $x_{n+1} - x_n < 0$, donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est croissante.

On montre au contraire que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est croissante. Il suffit de vérifier que Pour tout $n \geq 1$:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

La proposition (B) est vraie. En effet : $x_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$

La proposition (C) est fausse. Les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont majorées, car pour tout $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$:

$\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$, et par sommation on trouve : $x_n \leq 2$ et $y_n \leq 1$

La proposition (D) est vraie car $\lim_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$

A	B	C	D
V	F	F	V

03

La proposition (A) est vraie. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 10 + 5n$ (suite arithmétique)

On a : $$10 + 15 + 20 + ... + 95 + 100 = u_0 + u_1 + ... + u_{18} = \frac{19}{2}(u_0 + u_{18}) = 1045$$

La proposition (B) est fausse. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 3^n$ (suite géométrique)

On a : $$3 + 9 + 27 + ... + 3^6 = v_1 + ... + v_6 = v_1 \times \frac{3^6 - 1}{3 - 2} = 1092$$

Autre idée : $3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^6$ est un nombre pair (somme de six nombres impairs)

La proposition (C) est fausse. Posons pour tout entier $n \geq 2$: $u_n = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln n$

$$u_2 + u_3 + ... + u_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 + ... + \ln(n-1) - \ln n = -\ln n$$

Autre idée : voyons que pour tout entier $n \geq 2 : u_n < 0$ et $\ln n > 0$

La proposition (D) est vraie. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{2^n}$ et $w_n = 3$

On a alors (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, tandis que la suite (w_n) est constante. Donc :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + 3(n+1) = -\frac{1}{2^n} + 3n + 5$$

04

Calculons la somme $S = 1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + ... - 2010$

On peut écrire la somme S de la façon suivante :

$$S = 6 - 9 + 21 - 19 + 36 - 29 + ... + 6021 - 4019$$
$$= (6 + 21 + 36 + ... + 6021) - (9 + 19 + 29 + ... + 4019)$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 6 + 15n$ et $v_n = 9 + 10n$ (suites arithmétiques)

Donc : $$S = (u_0 + u_1 + ... + u_{401}) - (v_0 + v_1 + ... + v_{401})$$

Puisque la suite (u_n) est arithmétique de raison 15 et la suite (u_n) est arithmétique de raison 10, alors :

$$S = \frac{402(u_0 + u_{401})}{2} - \frac{402(v_0 + v_{401})}{2} = 201(6 + 6021) - 201(9 + 4019) = 401799$$

05

A	B	C	D	E
F	V	V	V	F

La proposition (A) est fausse. En effet : $u_6 = u_1 + 5r$ avec $r = 5$, donc : $u_6 = -3$.

La proposition (B) est vraie. Il suffit de prendre $m = 10$. On a bien $u_{10} = u_1 + 9\times5 = 17$.

De manière générale, on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $u_m = 5m - 33$ et donc : $u_m > m \Leftrightarrow m \geq 9$

La proposition (C) est vraie. En effet, l'inégalité $u_n u_{n+1} < 0$ est équivalente à $u_n(u_n + 5) < 0$. Ceci n'est possible que si $u_n \in]-5,0[$, donc $-5 < 5n - 33 < 0$ et alors $n = 6$.

La proposition (D) est vraie. L'équation $5p - 33 = 2007$ admet une solution dans $\mathbb{N}^*$ qui est $p = 408$.

La proposition (E) est fausse, car si $k \in \mathbb{N}^*$ avec $u_1 + u_k = 2007$, alors $5k - 33 = 2035$. Or cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^*$.

06

A	B	C	D
V	V	V	F

Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = u_n + 1 \text{ et } v_n = e^{-u_n}$$

La proposition (A) est vraie. En effet , pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = e^{-u_{n+1}} = e^{-u_n - 1} = \frac{v_n}{e}$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

La proposition (B) est vraie. Puisque (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$, alors (v_n) est convergente.

La proposition (C) est vraie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{e - 1}$$

Et comme $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = 0$, alors : $\lim S_n = \frac{1}{e-1}$

La proposition (D) est fausse. Il suffit de vérifie par exemple que $w_0 . w_2 \neq w_1^2$.

On peut aussi voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = -u_n$, cela entraîne que (w_n) est arithmétique de raison -1.

De plus, les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques sont des suites constantes.

07

A	B	C	D
F	V	V	F

La proposition (A) est fausse. On a : $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{1}{3^2}$, $v_2 = \frac{1}{3^4}$ et $v_0 \times v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{1}{3^{12}}$. Donc : $v_3 = \frac{1}{3^6}$

La proposition (B) est varie. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{3^{(n+1)^2+n+1}}}{\frac{1}{3^{n^2+n}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)^2+n+1-n^2-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+2}$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3^{-2}$ et alors $v_{n+1} = 3^{-2} v_n$.

La proposition (C) est vraie. (v_n) est géométrique de raison $q = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

La proposition (D) est fausse. Puisque $v_0 \times v_1 \times v_2 \times ..... \times v_{10} = \frac{1}{3^{10^2+10}}$ et donc :

$v_0 \times v_1 \times v_2 \times ..... \times v_{10} = \frac{1}{3^{110}}$, et enfin : $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_{10} = -110 \ln 3$

08

A	B	C	D
V	F	V	V

La proposition (A) est vraie.

La proposition (B) est fausse. Les points H_n , H_{n+1} et H_{n+2} ne sont pas colinéaires.

La proposition (C) est vraie. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \cos\left(A\hat{C}B\right) = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 - AB^2}}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La suite (ℓ_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La proposition (D) est vraie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n = \ell_0 + \ell_1 + ... + \ell_n = \ell_0 . \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{3}}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Puisque $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$ alors $\lim \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = 0$ et donc : $\lim L_n = \frac{8}{2-\sqrt{3}}$ et $\frac{8}{2-\sqrt{3}} < 30$

09

On considère la propriété $\mathcal{P}$: « Il existe un réel k tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n.u_{n+1} = ku_{n+2}^2$ »

1)- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ et $u_{n+2} = qu_{n+1}$ et donc $u_n.u_{n+1} = \frac{1}{q^3}u_{n+2}^2$. En posant $k = \frac{1}{q^3}$, on en déduit que toute suite géométrique vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

2)- considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+2}^2 = \left(e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}\right)^2 = e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = u_n.u_{n+1}$$

Par conséquent, la suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ (avec ici $k = 1$)

10

A	B	C	D
V	V	F	F

<u>La proposition (A)</u> est vraie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = \ln\left(\sqrt{2}u_{n+1}\right) = \ln\left(2u_n^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{2}u_n\right) = 2v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$.

<u>La proposition (B)</u> est vraie. En effet, puisque la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2}\ln(2) \times 2^n = -2^{n-1}\ln(2)$. En particulier, $v_{10} = -2^9\ln(2) = -512\ln(2)$

<u>La proposition (C)</u> est fausse. Justification: si $n = 0$, alors $\sum_{k=0}^{0} v_k = v_0 = -\frac{1}{2}\ln(2)$. Mais $(\ln 2)(1 - 2^0) = 0$.

<u>La proposition (D)</u> est fausse. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(\sqrt{2}u_n\right)$. Cela entraîne que $u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{v_n}$, et donc :
$$u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{v_0+v_1+v_2+\ldots v_n} = \frac{1}{2^{2^n}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

<u>Remarque :</u> on peut faire un raisonnement par contre-exemple en calculant $u_0 \times u_1$.

11

Soit (u_n) une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k.u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0u_{n+1}} \qquad (*)$$

Soit r la raison de la suite (u_n). Deux cas peuvent se présenter :

- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante, et dans ce cas $(*)$ est claire.

- Si $r \neq 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k . u_{k+1}} = \frac{r}{u_k . u_{k+1}}$

Par sommation on obtient : $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right) = r\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k . u_{k+1}}$, et donc : $\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} = r\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k . u_{k+1}}$

Puisque $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$, alors $\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}$, et par suite $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k . u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$.

12

1)- L'équation (E) est équivalente à $az + b = cz^2 + dz$, donc $cz^2 + (d-a)z - b = 0$.

C'est une équation de second degré qui admette une ou deux solutions dans $\mathbb{C}$.

2)- a)- Si $z_0 = \beta$ alors la suite (z_n) est constante. En effet, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \beta$.

Pour $n = 0$, on a bien $z_0 = \beta$. Supposons que $z_n = \beta$ et montrons que $z_{n+1} = \beta$.

On a : $$z_{n+1} = \frac{a z_n + b}{c z_n + d} = \frac{a\beta + b}{c\beta + d} = \beta$$

Conclusion : La suite (z_n) est constante

b)- On suppose maintenant que $z_0 \neq \beta$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}$

✓ Montrons que w_n est bien définie :

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq \beta$. En effet, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $z_{n_0} = \beta$,

alors : $$\frac{a z_{n_0-1} + b}{c z_{n_0-1} + d} = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

ceci entraîne que : $z_{n_0-1} = \beta$

Ainsi de suite jusqu'à l'obtention de $z_{n_0-1} = z_{n_0-2} = \ldots = z_0 = \beta$.

Ceci contredit l'hypothèse $z_0 \neq \beta$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq \beta$. Par suite, w_n est bien définie.

✓ Montrons que (w_n) est géométrique :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = \frac{z_{n+1} - \alpha}{z_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{az_n + b}{cz_n + d} - \alpha}{\frac{az_n + b}{cz_n + d} - \beta} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \times \frac{(az_n + b)(c\alpha + d) - (cz_n + d)(a\alpha + b)}{(az_n + b)(c\alpha + d) - (cz_n + d)(a\beta + b)}$$

Par conséquent : $w_{n+1} = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d} \times w_n$

Si on pose $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = qw_n$.

La suite (w_n) est alors géométrique de raison $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.

3)- On suppose que (E) admet une unique solution β .

a)-On montre de la même façon suivie dans 2)-a

b)- En suivant la même démarche signalée en 2)-b, on montre que v_n est bien définie sur $\mathbb{N}$.

Reste à montrer que la suite (v_n) est arithmétique est arithmétique.

En effet, puisqu'on sait que le discriminant de l'équation (E) est nul, on obtient alors $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$. Plus précisément :

$$(cz+d)\left(z - \frac{az+b}{cz+d}\right) = c(z-\alpha)^2$$

On en déduit que : $\dfrac{az+b}{cz+d} - \alpha = (z-\alpha)\left(1 - \dfrac{c(z-\alpha)}{cz+d}\right) = \dfrac{(z-\alpha)(d+c\alpha)}{cz+d}$

Et comme $cz+d = c(z-\alpha)+(d+c\alpha)$, alors : $\dfrac{1}{\dfrac{az+b}{cz+d} - \alpha} = \dfrac{1}{z-\alpha} + \dfrac{c}{d+c\alpha}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = v_n + \dfrac{c}{d+c\alpha}$

Ainsi, la suite (v_n) et bien une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{c}{d+c\alpha}$

LIMITE D'UNE

SUITE NUMERIQUE

Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

Soit $f(x)=2x(1-x)$ et la suite (u_n) définie par : $u_0\in[0,1]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

(A) Si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell=0$

(B) Si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell=\dfrac{1}{2}$

(C) Si $u_0\in]0,1[$ alors (u_n) ne converge pas vers 0.

(D) La suite (u_n) est croissante.



Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{n^2}}{n^2+1}=+\infty$; (B) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{\ln(n+1)}$ *n'existe pas*

(C) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3+(-1)^n n}{n^2-1}=2$; (D) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{9n^2-n+1}-3n=-\dfrac{1}{4}$



Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n+n^3}{e^{2n}+n^2}=1$; (B) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n n^2+2n+1}{n^2+1}$ *n'existe pas*

(C) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)=0$; (D) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin n+\ln n^2\right)$ *n'existe pas*



Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1}=1$; (B) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$ *n'existe pas*

(C) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}\right)=0$; (D) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{e^{3n}+n^2}$ *n'existe pas*



Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

Toute suite (u_n) telle que $\dfrac{2}{n^2}\le u_n\le 1+\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ est :

(A) *croissante* ; (B) *bornée* ; (C) *convergente* ; (D) *divergente*



Extrait concours ENSA — Choisir la bonne réponse

Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ alors :

(A) (u_n) *est croissante* ; (B) (u_n) *est positive*

(C) La suite (v_n) définie par $v_n = u_n \ln\left(1 - \dfrac{1}{u_n}\right)$ est convergente

06

Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

(A) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors $(|u_n|)$ est une suite géométrique de raison q.

(B) Si (u_n) est une suite bornée alors (u_n) est convergente.

(C) Si (u_n) est une suite bornée alors $\left(\dfrac{(-1)^n}{n} u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

(D) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \dfrac{1}{2} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ alors la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.



Extrait concours FMFP — Choisir la bonne réponse

(A) La suite de terme général $(-1)^n \dfrac{n-1}{n+3}$ converge vers 0.

(B) La limite de la suite de terme général $\dfrac{\cos n}{e^n + 1}$ n'existe pas.

(C) La suite de terme général $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$ diverge.

(D) La suite de terme général $\dfrac{e^{-n^3+1}}{n+1}$ converge vers 0.



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Pour $x \in \left]0,1\right[$, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k.x^k$$

2)- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{n!} \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(n-1)!} \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(n+1)!}$$

09

Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$

1)- Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0,+\infty[$.

2)- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3)- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$



Extrait concours ENSA — Choisir la bonne réponse

1)- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , telle que : $\sum\limits_{p=1}^{p=n} u_p = \frac{11^n - 1}{5}$

Alors la valeur de u_3 est :

(A) $u_3 = 121$ (B) $u_3 = 242$ (C) $u_3 = 363$

2)- La valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est :

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (B) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ (C) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = +\infty$

3)- La valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ vaut :

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = 1$ (B) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{-1}$ (C) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = 0$



Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Soit (u_n) une suite réelle bornée, vérifiant la condition : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

2)- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n} = 0$

3)- On considère la suite (d_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 2$

4)- Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$ et $0 \leq v_n \leq 3$

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n.v_n = 6$. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?



01

A	B	C	D
F	F	V	F

La proposition (A) est fausse. Si on prend $u_0 = \frac{1}{2}$, alors la suite (u_n) serait constante et a pour valeur $\frac{1}{2}$.

La proposition (B) est fausse. Si on prend $u_0 = 0$, alors la suite (u_n) serait la suite nulle et $\lim u_n = 0$.

La proposition (C) est vraie. On a pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 2x - 2x^2 = \frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. Par conséquent, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 2u_n(1-u_n) - u_n = u_n(1-2u_n)$ et $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. La suite (u_n) est donc croissante majorée, donc convergente vers une solution de l'équation $f(x) = x$ dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$. Comme $u_n \geq u_0 > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

La proposition (D) est fausse. Il suffit de remarquer que si $u_0 = 1$ alors $u_1 = 0$.

02

A	B	C	D
V	F	F	F

La proposition (A) est vraie. Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

La proposition (B) est fausse. En effet, d'après l'encadrement $\left|\frac{\sin n}{\ln(n+1)}\right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$, on aura :

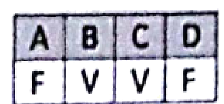
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{\ln(n+1)} = 0$

La proposition (C) est fausse. On a pour $n \geq 2$: $\frac{2n^3 - n}{n^2 - 1} \leq \frac{2n^3 + (-1)^n n}{n^2 - 1} \leq \frac{2n^3 + n}{n^2 - 1}$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n^3 - n}{n^2 - 1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n^3 + n}{n^2 - 1} = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n^3 + (-1)^n n}{n^2 - 1} = +\infty$

La proposition (D) est fausse. En effet, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{9n^2 - n + 1} - 3n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-n+1}{\sqrt{9n^2 - n + 1} + 3n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 3} = -\frac{1}{6}$$



A	B	C	D
F	V	V	F

03

La proposition (A) est fausse. En effet : $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n}+n^{3}}{e^{2n}+n^{2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-n}+n^{3}e^{-2n}}{1+n^{2}e^{-2n}}=0$.

On rappelle que l'exponentielle l'emporte sur les puissances en $+\infty$.

La proposition (B) est vraie. Si on pose $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n}n^{2}+2n+1}{n^{2}+1}=\ell$ avec $\ell\in\mathbb{R}$, alors : $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n}n^{2}}{n^{2}+1}=\ell$

car $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n^{2}+1}=0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2}+1}{n^{2}}=1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n}n^{2}}{n^{2}+1}\times\frac{n^{2}+1}{n^{2}}=\ell\times1=\ell$

On en déduit alors $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n}=\ell$ et c'est absurde car la suite de terme général $(-1)^{n}$ n'a pas de limite.

La proposition (C) est vraie, car : $\left|-\frac{2}{3}\right|<1$ et $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=0$

La proposition (D) est fausse. En effet :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin n+\ln n^{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}+\frac{2\ln n}{n}\right)=0 \qquad \text{(Remarquer que } \left|\frac{\sin n}{n}\right|<\frac{1}{n}\text{)}$$

04

A	B	C	D
F	F	F	F

La proposition (A) est fausse. En effet : $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n\sqrt{n}}{n^{2}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}=0$.

La proposition (B) est fausse. En effet, la continuité de la fonction sin nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{n}\right)=\sin\pi=0$$

La proposition (C) est fausse. On a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=+\infty$

La proposition (D) est fausse . L'encadrement $\left|\frac{\cos n}{e^{3n}+n^{2}}\right|\le\frac{1}{e^{3n}+n^{2}}$ nous fournit $\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{e^{3n}+n^{2}}=0$

05

A	B	C	D
F	V	F	F

La proposition (A) est fausse. Contre-exemple : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}, u_{n}=\frac{2}{n}$. On a la suite (u_{n}) vérifie les conditions de l'exercice, mais c'est une suite strictement décroissante.

La proposition (B) est varie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $$0 \leq \frac{2}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

La proposition (C) est fausse. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 = u_1 = 2 \text{ et si } n \geq 1, (u_{2n} = \frac{1}{2} \text{ et } u_{2n+1} = \frac{1}{3})$$

On a bien un exemple des suites qui vérifie la condition de l'exercice, mais aussi d'une suite divergente.

Le résultat $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ signifie que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon)$

C'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang n_0, tous les u_n sont dans un intervalle centré en ℓ et ceci $\forall \varepsilon > 0$.

Pour la suite (u_n) donnée, les termes u_n ne vérifient pas cette condition. C'est une suite divergente.

La proposition (D) est fausse. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 = u_1 = 2 \text{ et si } n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{2}$$

On a bien $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

06

A	B	C
F	F	V

La proposition (A) est fausse. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 - 3n$

On a bien $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, mais la suite (u_n) n'est pas croissante car : $u_0 > u_1$

La proposition (B) est fausse. Il suffit de prendre le contre exemple ci-dessus et voir que $u_1 = -2$.

La proposition (C) est vraie. En effet, puisque $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} - \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)}{-\frac{1}{u_n}} = -1$$

Donc la suite (v_n) est convergente.

07

A	B	C	D
F	F	V	F

La proposition (A) est fausse. Considérons la suite (u_n) définie par : $u_n = (-2)^n$

La suite (u_n) est géométrique de raison $q=-2$, tandis que la suite $(|u_n|)$ est géométrique de raison 2 car pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_n|=2^n$.

La proposition (B) est fausse. Un contre exemple très connu est celle de la suite (u_n) définie par : $u_n=(-1)^n$

Cette suite est bornée par -1 et 1, mais qui est divergente.

La proposition (C) est vraie. En effet, puisque la suite (u_n) est bornée, alors il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|u_n|\le M$ et dans ce cas $\left|\frac{(-1)^n}{n}u_n\right|\le\frac{M}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{n}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}u_n=0$.

La proposition (D) est fausse. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=-n$. On a alors la suite (u_n) vérifie :

$u_n-\frac{1}{2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$, mais qui ne converge pas vers $\frac{1}{2}$.

Si, par exemple, $0\le u_n-\frac{1}{2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

08

A	B	C	D
F	F	F	V

La proposition (A) est fausse. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+3}=\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n-1}=1$ nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n=\ell$. Or

La suite $\left((-1)^n\right)_n$ diverge.

La proposition (B) est fausse. Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{\cos n}{e^n+1}\right|\le\frac{1}{e^n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^n+1}=0$, alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{e^n+1}=0$

La proposition (C) est fausse. En effet :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

La proposition (D) est vraie. En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-n^3+1}}{n+1}=0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n^3+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$

09

1)- Soit $x\in\,]0,1[$, calculons les limites suivantes :

• $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ (car $|x|<1$ et $\lim_{n\to+\infty}x^{n+1}=0$)

• Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$. Le polynôme P_n est dérivable sur $]0,1[$ et de plus :

$P_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}k.x^{k-1}$ et comme $P_n(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, alors : $P_n'(x)=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k.x^k=\lim_{n\to+\infty}x\sum_{k=0}^{n}k.x^{k-1}=\lim_{n\to+\infty}x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$

Enfin : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k.x^k=\frac{x}{(1-x)^2}$ (On rappelle que $\forall\alpha\geq0,\forall x\in]0,1[$: $\lim_{n\to+\infty}n^\alpha x^n=0$)

2)- Calculons les limites suivantes :

• Pour la limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n-1)!}$:

Si on pose pour $n\geq2$: $u_n=\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}=\frac{1!+2!+\ldots+(n-2)!}{n!}+\frac{1}{n}+1$

On aura : $1\leq u_n\leq\frac{(n-2).(n-2)!}{n!}+\frac{1}{n}+1$ et donc : $1\leq u_n\leq\frac{n-2}{n(n-1)}+\frac{1}{n}+1$

Par passage à la limite, on obtient : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

• Pour la limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n-1)!}$:

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n-1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}\times n$ et donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n-1)!}=+\infty$

• Pour la limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+1)!}$:

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}\times\frac{1}{n+1}=1\times0=0$

10

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}^+$, on pose : $P_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x-1$

1)- La fonction P_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, donc P_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[P_n(0),\lim_{x\to+\infty}P_n(x)\right[$, c'est-à-dire dans $[-1,+\infty[$. Puisque $0\in[-1,+\infty[$ alors il existe un unique

$\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $P_n(\alpha_n) = 0$. (Signalons que $\alpha_n \neq 0$ car $P_n(0) = -1$)

2)- Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$: $P_{n+1}(x) - P_n(x) = x^{n+1}$ et donc $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$.

Pour $x = \alpha_{n+1}$: $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geq P_n(\alpha_{n+1})$ et comme $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ alors $P_n(\alpha_{n+1}) \leq 0$

Donc : $P_n(\alpha_{n+1}) \leq P_n(\alpha_n)$

La croissance de la fonction P_n sur $\mathbb{R}^+$ nous donne $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, donc la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Puisque $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante minorée par 0 alors elle est convergente.

3)- Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$:

On a pour tout entier $n \geq 2$: $P_n(0).P_n\left(\dfrac{3}{4}\right) < 0$ donc $0 < \alpha_n < \dfrac{3}{4}$.

On a aussi pour tout $x \in \left]0, \dfrac{3}{4}\right[$: $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - x}{x-1} - 1$

Donc : $P_n(\alpha_n) = \alpha_n \dfrac{\alpha_n^n - 1}{\alpha_n - 1} - 1 = 0$ et alors $\alpha_n^n = \dfrac{1}{\alpha_n}(\alpha_n - 1) + 1$

Puisque $0 < \alpha_n^n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$. Si on note $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$, on obtient : $\dfrac{\ell - 1}{\ell} + 1 = 0$

Ce qui donne $\ell = \dfrac{1}{2}$.

11

1)- On a $u_1 = 2$ et $u_1 + u_2 = 24$, donc $u_2 = 22$. Puisque (u_n) est géométrique alors $u_2^2 = u_1.u_3$ et donc $u_3 = 242$. La bonne réponse est alors (B).

2)- La valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est 0. En effet :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{-n\ln 2 + 2\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n\left(\ln 2 + 2\frac{\ln n}{n}\right)} = 0$$

La bonne réponse est alors (A)

3)- La valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ est 0. En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$

Comme : $\lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty} -n\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}=-\infty$ alors : $\lim_{n\to+\infty} e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=0$

La bonne réponse est alors (C).

12

1)- Soit (u_n) une suite réelle bornée, vérifiant la condition : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 2u_n\le u_{n-1}+u_{n+1}$

Montrons que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$. Pour cela, considérons la suite (v_n) définie par : $v_n=u_{n+1}-u_n$

La suite (v_n) vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\le v_{n+1}$. Ceci car $2u_{n+1}\le u_n+u_{n+2}$. Donc (v_n) est croissante.

Si $|u_n|\le M$ alors $|v_n|\le 2M$. Donc la suite (v_n) est borée, en particulier elle est majorée.

Puisque la suite (v_n) est croissante et majorée alors elle est convergente. Posons $\lim_{n\to+\infty} v_n=\ell$.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $n\ge n_0\Rightarrow \ell-\varepsilon\le u_{n+1}-u_n\le \ell+\varepsilon$

Supposons que $\ell>0$ et posons $\varepsilon=\frac{\ell}{2}$. Dans ce cas $u_{n+1}-u_n>0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang n_0. Puisqu'elle est bornée alors elle est convergente et donc $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$. Absurde

On traite de même le cas $\ell<0$ pour aboutir à une absurdité. Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$

2)- Montrons que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos 1+\cos 2+\ldots+\cos n}{n}=0$:

On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, par conséquent :

$$\frac{\cos 1+\cos 2+\ldots+\cos n}{n}+i\frac{\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{ik}=\frac{e^i}{n}\frac{1-e^{in}}{1-e^i}$$

Or : $\left|\frac{e^i}{n}\frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right|\le\frac{2}{n|1-e^i|}$ car : $|e^i|=1$ et $|1-e^{in}|\le 1+|e^{in}|\le 2$. Donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^i}{n}\frac{1-e^{in}}{1-e^i}=0$

Par conséquent :

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos 1+\cos 2+\ldots+\cos n}{n}+i\frac{\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n}{n}\right)=0$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n}{n}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos 1+\cos 2+\ldots+\cos n}{n}=0$$

Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

1)-La valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{\left|2x+x^2\right|}$ est :

(A) 2 ; (B) -1 ; (C) $+\infty$; (D) 1

2)-La valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$ est :

(B) $\dfrac{1}{2}$; (B) -1 ; (C) 0 ; (D) $-\infty$

3)-La valeur de la limite $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+3x^4+1}}{\sqrt{4x^4-3}}$ est :

(C) $-\dfrac{1}{2}$; (B) $+\infty$; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) $\dfrac{3}{2}$

C1

Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

1)- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}\quad ;\quad \lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+3x-7}-x\quad ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)}\quad ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$$

2)- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

C2

Extrait concours ENSAM — Exercice d'entraînement

1)- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, et qui admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Démontrer que la fonction f est constante.

2)- Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

3)-Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & ;\ x>2\\[2mm] \dfrac{2x+b}{3} & ;\ x\le 2\end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit continue en 2.

C3

Du Bac Aux Classes Prépas — Exercice d'entraînement

Un marcheur parcourt $12km$ en une heure. Montrer qu'il existe au moins un intervalle de $30\min$ pendant lequel il parcourt exactement $6km$.



Extrait concours ENSA — Vrai ou Faux ?

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(A) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

(B) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=+\infty$

(C) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)f(x)=0$

(D) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)f(x)=1$



Extrait concours FMD — Choisir la bonne réponse

L'équation $4x^3-7x^2+1=0$ admet dans l'intervalle $]-1,1[$:

(A) 0 solution ; (B) 1 solutions ; (C) 2 solutions ; (D) 3 solutions ; (E) 4 solutions



Extrait concours FMFP — Choisir la bonne réponse

1)- Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sin(2x)-\sin x}{\sin(2x)+\sin x}$. La limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ vaut :

(A) $-\infty$; (B) -1 ; (C) 0 ; (D) $\dfrac{1}{3}$; (E) $+\infty$

2)- Soit g la fonction définie par : $g(x)=(\pi-2x)\tan x$. La limite $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} g(x)$ vaut :

(A) $-\infty$; (B) -2 ; (C) 0 ; (D) 2 ; (E) $+\infty$

3)- Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$. La limite $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ vaut :

(A) $+\infty$; (B) 2 ; (C) $\dfrac{4}{3}$; (D) $\dfrac{2}{3}$; (E) 0

4)- Soit k la fonction définie par : $k(x)=\dfrac{\pi\sin\left(\pi+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x^3+x+1}}$. La limite $\lim\limits_{x\to +\infty} k(x)$ vaut :

(A) 1 ; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) 0 ; (D) -1 ; (E) *n'existe pas*

07

Examen type HEM

Choisir la bonne réponse

1)- Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$

La limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ vaut :

(A) $\frac{1}{5}$; (B) $\dfrac{3}{2}$; (C) $+\infty$; (D) $\dfrac{5}{4}$

2)- Soit g la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}$

La limite $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ vaut :

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) $\dfrac{5}{2}$; (D) $\dfrac{3}{2}$

C8

Extrait concours FMD

Choisir la bonne réponse

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x+1+e^{2x}=0$

(A) (E) n'admet pas de solution.

(B) (E) admet une solution dans $[0,1]$

(C) (E) admet deux solutions

(D) (E) admet une solution dans $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$

(E) (E) admet une solution dans $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$

C9

Du Bac Aux Classes Prépas

Exercice d'entraînement

1)-Trouver les limites suivantes ou dire si elles n'existent pas :

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{E(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \quad (a>0 \text{ et } b>0)$$

2)-Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x)=\left(E(x)\right)^2+\left(2E(x)+1\right)\left(x-E(x)\right)$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3)-Soit $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue.

On suppose qu'il existe $\ell\in[0,1[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\ell$. Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

C10

Extrait concours ENSAM

Vrai ou Faux ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$

(A) La suite $\left(f_n(1)\right)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique

(B) Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(C) Pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

(D) Si on note α_n l'unique solution positive de l'équation $f_n(x) = 0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n < \frac{1}{n}$



Du Bac Aux Classes Prépas

Exercice d'entraînement

1)- Calculer les limites en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} \quad ; \quad g(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad ; \quad h(x) = \frac{x(1-\cos x)}{\sin(3x) - 3\sin x}$$

2)- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer en fonction de a la limite suivante :

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x}$$

3)- Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c et m l'existence et la valeur des limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + mx\sqrt{x+2}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + mx\right)$$



Du Bac Aux Classes Prépas

Exercice d'entraînement

f est une fonction définie sur $[0,1]$ et g est une fonction définie et continue sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) > f(1)$ et que $f + g$ est une fonction croissante sur $[0,1]$.

Montrer que f prend toutes les valeurs de l'intervalle $[f(1), f(0)]$.



Du Bac Aux Classes Prépas

Choisir la bonne réponse

Quelle condition est nécessaire pour que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admette une limite finie en $+\infty$?

(A) f est monotone et bornée au voisinage de $+\infty$

(B) f est constante au voisinage de $+\infty$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x+1) - f(x)\right) = 0$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$



01

1)- La valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|}$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4x^2+x^3}{(2x+x^2)^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x^2(4+x)}{x^2(2+x)^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4+x}{(2+x)^2}}=1$

Donc la bonne réponse est (D)

2) - La valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$:

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{x+\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{-x}\left(-\sqrt{-x}+1\right)}{\sqrt{-x}\left(-\sqrt{-x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sqrt{-x}+1}{-\sqrt{-x}-1}=-1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=-1$

Donc la bonne réponse est (B)

3)- La valeur de la limite $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+3x^4+1}}{\sqrt{4x^4-3}}$:

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+3x^4+1}}{\sqrt{4x^4-3}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[6]{\dfrac{\left(x^6+3x^4+1\right)^2}{\left(4x^4-3\right)^3}}$. Puisque $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left(x^6+3x^4+1\right)^2}{\left(4x^4-3\right)^3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^{12}}{64x^{12}}=\dfrac{1}{64}$

Alors : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+3x^4+1}}{\sqrt{4x^4-3}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}=\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^6}=\dfrac{1}{2}$. La bonne réponse est alors (C)

02

1)- Calculons les limites suivantes :

- Pour la limite $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$, on pose $x=t^6$ et donc :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{t^2+t^3}{t^2-t^3}=\lim_{t\to +\infty}-\frac{t^3}{t^3}=-1$$

- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-7}-x=+\infty$ (Car $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-7}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$)

- $$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to0} \frac{\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\times(-2x)}{\frac{\sin(3x)}{3x}\times 3x}=\lim_{x\to0} \frac{\frac{\ln(1-2x)}{-2x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}}\times\left(\frac{-2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

- $$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

2)- Montrons que $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$:

On a : $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{\tan^2 x}\ln(\cos x)}=\lim_{x\to0} e^{\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}\times\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}}$

Puisque : $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-1}{x^2}}{\frac{\tan^2 x}{x^2}}=-\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}=1$.

Par conséquent : $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

03

1)- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, et qui admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Supposons que la fonction f n'est pas constante. Donc il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(a)\neq f(b)$.

Soit $T>0$ la période de la fonction f, et considérons les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n\in\mathbb{N}$

par : $u_n=f(a+nT)$ et $v_n=f(b+nT)$

Puisque : $\lim_{n\to+\infty} a+nT=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} b+nT=+\infty$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} f(a+nT)=\ell$ et $\lim_{n\to+\infty} f(b+nT)=\ell$

Puisque T est la période de f, alors $f(a+nT)=f(a)$ et $f(b+nT)=f(b)$, et donc :

$f(a)=f(b)=\ell$. Ceci contredit l'hypothèse $f(a)\neq f(b)$

Par conséquent : la fonction f est constante.

2)- Calculons $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0$$

3)- Pour que la fonction f soit continue en 2 , il faut et il suffit que : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=f(2)$

C'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+x-a}{x-2}=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{2x+b}{3}=\frac{4+b}{3}$$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2+x-a=6-a$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-2=0$, alors pour que la limite $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+x-a}{x-2}$ soit finie, il faut que $6-a=0$, car sinon $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+x-a}{x-2}=\pm\infty$. Par conséquent : $a=6$

On a alors : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}(x+3)=5$

Pour b : $\frac{4+b}{3}=5$ donne $b=11$.

C4

Pour répondre à cet exercice, on va considérer la fonction d définie sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$d:[0,1]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto d(t)$$

Où $d(t)$ est le nombre de kilomètres parcourus en t heures. La fonction d étant continue sur $[0,1]$.

Introduisons la fonction continue f définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ Par : $f(t)=d\left(t+\frac{1}{2}\right)-d(t)$

On obtient alors :

$$f(0)=d\left(\frac{1}{2}\right)-d(0)=d\left(\frac{1}{2}\right)\quad\text{et}\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=d(1)-d\left(\frac{1}{2}\right)=12-d\left(\frac{1}{2}\right)$$

On en déduit que :

$$\frac{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=6\ \text{et donc}\ 6\in\left[f(0),f(1)\right]$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(t_0)=6$.

Cela signifie que le marcheur a parcouru $6km$ en une heure, entre les instants t_0 et $t_0+\frac{1}{2}$ (t_0 en heures)

A	B	C	D
F	F	V	F

05

La proposition (A) est fausse. Contre-exemple : $f(x) = x^2$

La proposition (B) est fausse. Contre-exemple : $f(x) = \frac{1}{|x|}$ ou $f(x) = -\ln|x|$, ...etc.

La proposition (C) est vraie. Il s'agit des opérations sur les limites des fonctions :

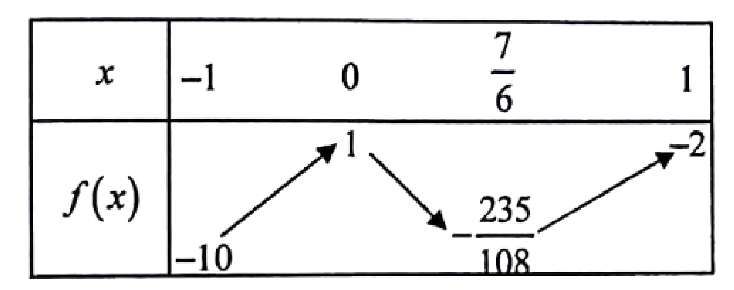
$$\lim_{x \to 0} (1-x) f(x) = 1 \times 0 = 0$$

La proposition (D) est fausse. Contre-exemple : $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

06

On considère l'équation suivante : $4x^3 - 7x^2 + 1 = 0$

La fonction f définie par $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 1$ est dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$ et de plus, pour tout $x \in [-1,1]$, $f'(x) = 2x(6x-7)$. Le tableau de variation de f sur $[-1,1]$ est donc :



x	-1	0	$\frac{7}{6}$	1
$f(x)$	-10 ↗	1 ↘	$-\frac{235}{108}$ ↗	-2

D'après le tableau de variation de la fonction f, on en déduit que l'équation $4x^3 - 7x^2 + 1 = 0$ admet

Deux solutions dans l'intervalle $]-1,1[$. Donc la bonne réponse est (C) .

07

1)-Pour le calcul de la limite $\lim_{x \to 0} f(x)$, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - \sin x}{\sin(2x) + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2x - \frac{\sin x}{x} \times x}{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2x + \frac{\sin x}{x} \times x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 - \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{3}$$

Donc la bonne réponse est (D).

2)- Pour le calcul de la limite $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x)$, on a : (en introduisant un changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x = \lim_{t \to 0} 2t \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \lim_{t \to 0} \frac{2t}{\tan t} = 2$$

Donc la bonne réponse est (D)

3)- Pour le calcul de la limite $\lim_{x\to1} h(x)$, on a :

$$\lim_{x\to1} h(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x+1}{x+2}=\frac{4}{3}$$

Donc la bonne réponse est (C)

4)- Pour le calcul de la limite $\lim_{x\to+\infty} k(x)$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi\sin(\pi+\sqrt{x})}{\sqrt{x^3+x+1}}=0 \quad \left(\text{Car } \left|\frac{\pi\sin(\pi+\sqrt{x})}{\sqrt{x^3+x+1}}\right|\le\frac{\pi}{\sqrt{x^3+x+1}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{x^3+x+1}}=0\right)$$

Donc la bonne réponse est (C)

08

1)- Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+3}{x+3}=\frac{5}{4}$$

Donc la bonne réponse est (D)

2)- Soit g la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=\frac{5}{2}$$

Donc la bonne réponse est (C)

09

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x+1+e^{2x}=0$

Pour cela, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+1+e^{2x}$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus sa dérivée sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=2+2e^{2x}$

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, Cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Comme $0\in f(\mathbb{R})$ alors l'équation (E) admet Une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

Le résultat $f(-1).f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ donne $\alpha\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$.

La bonne réponse est alors (E)

1)- Pour la limite $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|$. puisque $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$.

Pour la limite $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$. On distingue alors deux cas :

- Si $x > 0$, alors $1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
- Si $x < 0$, alors $1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

Pour la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{E(x)}{x}$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{E(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{E(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$

Pour le calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)$ avec $b > 0$ et $b > 0$:

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$. On distingue alors deux cas :

- Si $x > 0$, alors $\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x} - 1\right) < \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{a}$, d'où $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{a}$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$
- Si $x < 0$, alors $\frac{b}{a} \leq \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) < \frac{x}{a}\left(\frac{b}{x} - 1\right)$, d'où $\frac{b}{a} \leq \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{a}E\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{b}{a}$

Par conséquent : $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$$

2)-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \left(E(x)\right)^2 + \left(2E(x) + 1\right)\left(x - E(x)\right)$

Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a pour tout $x \in \left]n, n+1\right[$, $E(x) = n$ et donc $f(x) = n^2 + (2n+1)(x - n)$. Cela montre Que la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $\left]n, n+1\right[$ car sa restriction sur cet intervalle est une fonction continue. Il s'ensuit alors que f est continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Reste l'étude de la continuité de f sur $\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} E(x) = n$ et $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} E(x) = n - 1$

Par conséquent :

$$\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x)=\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}}\left(E(x)\right)^2+\left(2E(x)+1\right)\left(x-E(x)\right)=n^2=f(n)$$

$$\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x)=\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}}\left(E(x)\right)^2+\left(2E(x)+1\right)\left(x-E(x)\right)=(n-1)^2+(2n-1)=n^2=f(n)$$

La fonction f est continue à gauche et à droite en tout point n de $\mathbb{Z}$, ce qui montre que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3)-Soit $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue.

Posons $h(x)=g(x)-x$. Remarquons d'abord que $h(0)=g(0)$ et donc $h(0)\geq 0$. Afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, on doit trouver un réel strictement positif α tel que $h(\alpha)\leq 0$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\ell$, alors :

$$(\forall\varepsilon>0),(\exists\alpha>0),(\forall x\in\mathbb{R}^+):\left(x\geq\alpha\Rightarrow\left|\frac{g(x)}{x}-\ell\right|\leq\varepsilon\right)$$

L'inégalité $\left|\frac{g(x)}{x}-\ell\right|\leq\varepsilon$ signifie que $|g(x)-\ell x|\leq\varepsilon x$, et qui implique que $g(x)-\ell x\leq\varepsilon x$. Comme $h(x)=g(x)-x$ alors $h(x)\leq(\varepsilon+\ell-1)x$. Puisque $\ell\in[0,1[$ alors on a le droit de prendre $\varepsilon=\frac{1-\ell}{2}$, et par suite $h(x)\leq\frac{\ell-1}{2}x\leq 0$. On a alors pour $\varepsilon=\frac{1-\ell}{2}$: $(\exists\alpha>0),(\forall x\in\mathbb{R}^+):(x\geq\alpha\Rightarrow h(x)\leq 0)$

En particulier $h(\alpha)\leq 0$. Puisque la fonction h est continue sur le segment $[0,\alpha]$ et $h(0)h(\alpha)\leq 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $h(x)=0$ (i.e. $g(x)=x$) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

11

A	B	C	D
F	V	V	V

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x^5+nx-1$

<u>La proposition (A)</u> est fausse. Justification : on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(1)=n$. La suite $\left(f_n(1)\right)_{n\geq1}$ n'est pas géométrique car le rapport $\frac{n+1}{n}$ n'est pas constant sur $\mathbb{N}^*$.

<u>La proposition (B)</u> est vraie. La fonction f_n est continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la fonction réciproque, la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

La proposition (C) est vraie. Cela provient de fait que f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La proposition (D) est vraie. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(0) = -1$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5}$.

On a donc $f_n(0) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, et comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors :

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{n}$$

12

1)- Calcul des limites en zéro :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)\tan x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\times \frac{\sin x}{x}}{\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)\frac{\tan x}{x}} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= \boxed{1}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} h(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{\sin(3x) - 3\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{3\sin x - 4\sin^3 x - 3\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{x(1-\cos x)}{4\sin^3 x} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}{4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3} \\ &= \boxed{-\frac{1}{8}}\end{aligned}$$

(On a utilisé la formule : $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$)

2)- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer en fonction de a la limite suivante : $\lim_{x \to a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x}$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h_a(x) = \sin(ax) - \sin(x^2)$

La fonction h_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_a'(x) = \left(\sin(ax) - \sin(x^2)\right)' = a\cos(ax) - 2x\cos(x^2)$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x} = -\lim_{x \to a} \frac{h_a(x) - h_a(a)}{x - a} = -h_a'(a) = a\cos(a^2)$$

Remarque :

On peut répondre à cette question sans faire appel à la dérivation, il suffit d'utiliser les formules de transformations trigonométriques :

$$\sin(ax) - \sin(x^2) = 2\sin\left(\frac{ax - x^2}{2}\right)\cos\left(\frac{ax + x^2}{2}\right)$$

Et on a pour tout $x \neq a$:

$$\frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x} = \frac{2\sin\frac{x(a-x)}{2}}{\frac{x(a-x)}{2}} \times \frac{x}{2} \times \cos\frac{x(a+x)}{2}$$

3)- Pour la limite $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + mx\sqrt{x+2}\right)$:

On a :

$$\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + mx\sqrt{x+2} = x\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}} + mx\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{2}{x}}$$
$$= x\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}} + m\sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)$$

De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}} + m\sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) = 1 + m$$

D'où la discussion suivante :

- Si $m > -1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + mx\sqrt{x+2}\right) = +\infty$$

• Si $m<-1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+mx\sqrt{x+2}\right)=-\infty$$

• Si $m=-1$:

$$\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}-x\sqrt{x+2}\right)=\frac{x^3+ax^2+bx+c-x^3-2x^2}{\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+x\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{(a-2)x^2+bx+c}{\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+x\sqrt{x+2}}$$

Trois cas peuvent se présenter :

➢ Si $a>2$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}-x\sqrt{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x^2+bx+c}{\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+x\sqrt{x+2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^4}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$=+\infty$$

➢ Si $a<2$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}-x\sqrt{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^4}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$=-\infty$$

➢ Si $a=2$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}-x\sqrt{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx+c}{\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+x\sqrt{x+2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{b+\frac{c}{x}}{\sqrt{x+a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{x+2}}$$

$$=0$$

- Pour la limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx\right)$:

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+m\right)$$

De plus : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+m\right)=1+m$ et $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

D'où la discussion suivante :

- Si $m>-1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx\right)=+\infty$$

- Si $m<-1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+mx\right)=-\infty$$

- Si $m=-1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1}=1$$

13

f étant une fonction définie sur $[0,1]$ et g est une fonction définie et continue sur $[0,1]$.

On suppose que $f(0)>f(1)$ et que $f+g$ est croissante sur $[0,1]$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\lambda\in\left]f(1),f(0)\right[$ tel que pour tout $x\in[0,1], f(x)\neq\lambda$.

On va montrer que g n'est pas continue sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour cela, considérons l'ensemble $E=\{x\in[0,1]/\lambda<f(x)\}$

On a $\lambda<f(0)$ et $0\in E$, donc $E\neq\varnothing$. De plus, l'ensemble E est majoré, donc il admet une borne supérieure $M=\sup E$. Montrons que g n'est pas continue en M.

Deux cas peuvent se présenter :

- **<u>1er Cas :</u>** $M\in E$

  Puisque $f(1)<\lambda$ alors $M<1$. Prenons $\varepsilon=\frac{1}{2}(f(M)-\lambda)$, on a $\varepsilon>0$. Pour tout $\alpha>0$, il existe $c\in\left]M,M+\alpha\right[\cap[0,1]$; $c\notin E$ puisque $M=\sup E$. Donc $f(c)<\lambda$, et par suite :

$$f(b)-f(c)>f(b)-\lambda>\varepsilon$$

  Puisque la fonction $f+g$ est croissante, alors $f(M)+g(M)\leq f(c)+g(c)$, et donc :

$$g(c)-g(M)\geq f(M)-f(c)>\varepsilon$$

  On a alors montré que :

$$(\exists\varepsilon>0),(\forall\alpha>0),(\exists c\in[0,1])/|c-M|<\alpha \text{ et } g(c)-g(M)>\varepsilon$$

Ce qui montre aussi la discontinuité de g en M .

• **2nd Cas :** $M \notin E$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}(\lambda - f(M))$, on a $\varepsilon > 0$. Pour tout $\alpha > 0$, il existe $c \in]M-\alpha, M[\cap [0,1] \cap E$.

On a $f(c) > \lambda$ car $c \in E$, donc $f(c) - f(M) > \lambda - f(M)$ et par suite $f(c) - f(b) > \varepsilon$.

Puisque la fonction $f+g$ est croissante, alors $f(c)+g(c) \leq f(M)+g(M)$, et donc :

$$g(M) - g(c) \geq f(c) - f(M) > \varepsilon$$

On a alors montré que :

$$(\exists \varepsilon > 0), (\forall \alpha > 0), (\exists c \in [0,1]) / |c - M| < \alpha \ et \ g(M) - g(c) > \varepsilon$$

Ce qui montre aussi la discontinuité de g en M .

Conclusion : f prend toutes les valeurs de l'intervalle $[f(1), f(0)]$.

14

La bonne réponse est C. En effet, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x+1) = \ell$ et par suite :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$$

On peut avoir $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ sans que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$. Contre-exemple : $f(x) = e^{-x}$

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ mais $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{e}$.

Enfin, l'exemple de la fonction $f(x) = e^{-x}$ montre qu'une fonction peut avoir une limite qu'elle n'atteint jamais.